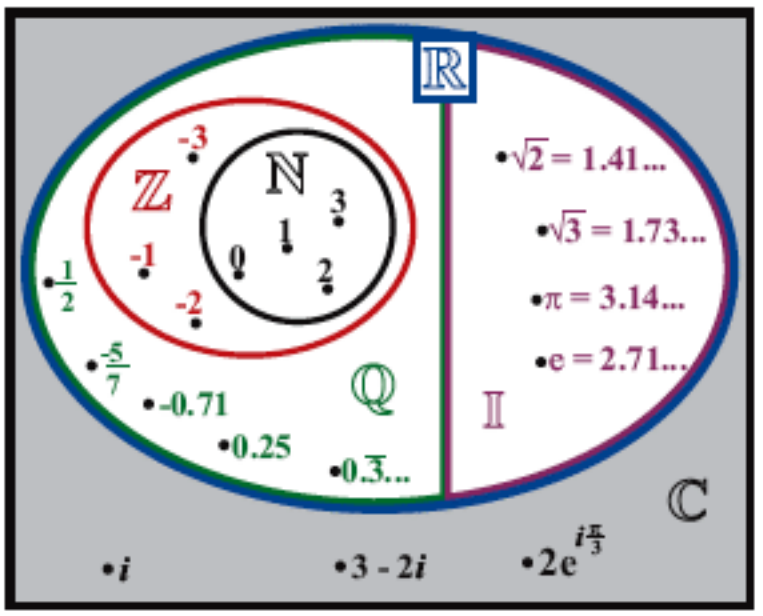
Formelsammlung in Mathematik

1. Zahlenmengen	Natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen	**2**
2. Algebra	Rechengesetze, Äquivalenzumformungen	**3**
	Binomische Formeln, Binomischer Satz, Bruchrechnen	4
	Potenzen, Logarithmen	5
	Translation, Rotation	5
3. Planimetrie	Allgemeine und rechtwinklige Dreiecke	**6**
	Gleichschenklige und gleichseitige Δ, Linien im	7
	Vierecke	8
	Kreisteile, Kreisgleichungen, Kreisw lsätze	9
4. Stereometrie	Prinzip von Cavalieri, Prismen und Py den	**10**
	Kugel, Platonische Körper	11
	Körper mit runden Begrenzu nache	12
5. Funktionen	Umkehrfunktionen, Polyn nktionen	**13**
	Geradengleichungen, Betrag ktion	14
	Parabeln, Potenz en, Ge onale Funktionen	15
	Exponential- ur Logari usfunk en	16
	Trigonom Funktionen	17
	Symmet e	18
6. Gleichungen	Quadr he Gleichu , Polynomgleichungen	**19**
7. Folgen und Reihen	thmeti und geometrische Folgen und Reihen	**20**
	Gre erte, G wertsätze, Regel von de l'Hôpital	21
	M el Harmonische Teilung, Vollständige Induktion	22
8. Di rechnung	fferen quotient, Ableitungsregeln	**23**
	abel Ableitungen und Stammfunktionen	24
9 ntegralr	Bestimmtes und unbestimmtes Integral	**24**
	Integrationsregeln, Rotationsvolumen, Bogenlänge	25
	Potenzreihen, Taylor-Polynome	26
10. Vekto	Elementare Vektoroperationen	**27**
	Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt	28
	Ebenengleichungen	29
11. Stochastik	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit, Mengenlehre	**30**
	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	31
	Binomialverteilung, Normalverteilung	32
	1-Var Statistik: Mittelwert, Median, Modalwert, Varianz	33
	2-Var Statistik: Lineare Regression	34

Um ein Register zu erstellen bitte graue Flächen ausschneiden

1 Zahlenmengen



- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$
- **Rationale Zahlen** = Menge aller Brüche: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0\}$ = Zahlen mit abbrechender oder periodischer Dezimalentwicklung.
- **Irrationale Zahlen** $\mathbb{I}$ = Zahlen mit unendlicher, nichtabbrechender und nichtperiodischer Dezimalentwicklung.
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R}$ = Vereinigung der rationalen und irrationalen Zahlen.
- **Komplexe Zahlen** $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$.

Komplexe Zahlen

▶ **Imaginäre Einheit:** $\boxed{i^2 = -1}$

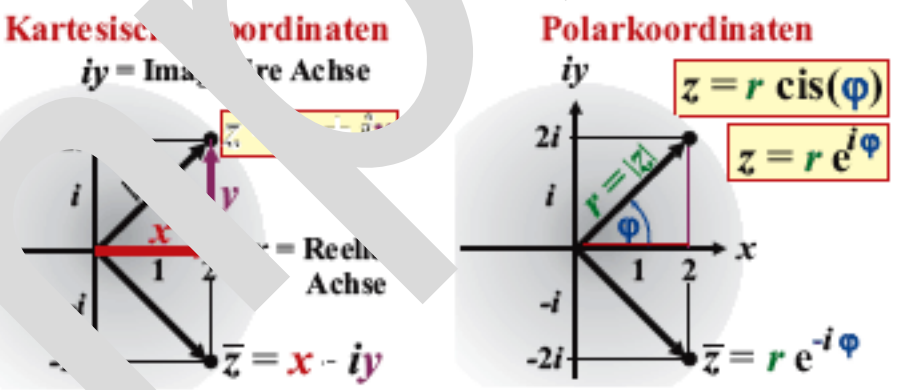
▶ **Eulersche Formel:**

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)}$$

$$e^{i\varphi} = \mathrm{cis}(\varphi), \quad |e^{i\varphi}| = 1$$

▶ **Gausssche Zahlenebene:**

xy-Ebene der kompl. Zahlen



Komplexe Zahl	z	$= x + i\,y$ $\begin{cases} x = \text{Realteil} \\ y = \text{Imaginärteil} \end{cases}$	$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \mathrm{cis}(\varphi)$
Konjugierte	$\overline{z}$	$\overline{z} = x - i\,y$	$\overline{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$
Betrag	$\lvert z \rvert$	$= \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\lvert z \rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Winkel		$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$	$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ $\varphi = \arg(z)$
Addition **Subtraktion**	$z_1 + z_2$ $z_1 - z_2$	$(x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2)$	
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2$	$(x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + i(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)$	$r_1\,r_2 \cdot \mathrm{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$
Division $(z_2 \neq 0)$	$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\lvert z_2 \rvert^2} = \frac{(x_1\,x_2 + y_1\,y_2) + i\,(x_2\,y_1 - x_1\,y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$	$\frac{r_1}{r_2} \cdot \mathrm{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$
Inverse $(z \neq 0)$	$\frac{1}{z}$	$\frac{\overline{z}}{\lvert z \rvert^2} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2}$	$\frac{1}{r} \cdot \mathrm{cis}(-\varphi)$
Potenzieren	z^n	$r^n \cdot (\cos(n\,\varphi) + i\,\sin(n\,\varphi)) = r^n \cdot \mathrm{cis}(n\,\varphi)$	
Radizieren	$\sqrt[n]{z}$	$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots (n-1)$	

Sample

2 Algebra

2.1 Rechengesetze

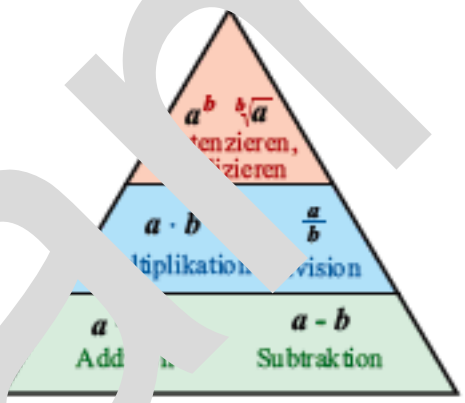
	Addition	Multiplikation
Kommutativgesetz:	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Assoziativgesetz:	$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c$
Distributivgesetz:	$a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$	
Neutrales Element:	$a+0=0+a=a$	$a\cdot 1=$ [illegible] $a=$ [illegible]
Inverses Element:	$a+(-a)=(-a)+a=0$	$a\cdot$ [illegible] $=$ [illegible] $\cdot a=1$

2.2 Reihenfolge der Operationen

Potenzieren, Radizieren **vor** Punktrechnung **vor** Strichrechnung

Freiwillige Klammern:

- $-1^2=-(1)^2=-1$
- $2\cdot 3^4=2\cdot(3^4)=162$
- $4/2+3=(4/2)+3=5$
- $2+3\cdot 4=2+(3\cdot 4)=14$



Obligatorische Klammern:

- $(-1)^2=(-1)\cdot(-1)=+1$
- $(2\cdot 3)^4=6^4=1296$
- $4/(2+3)=4/5=0.8$
- $(2+3)\cdot 4=5\cdot 4=20$

2.3 Äquivalenzumformungen

Gleichung $a=b$

$a\pm c=b\pm c$	**Addition / Subtraktion**
$a\cdot c=b\cdot c$	**Multiplikation** mit $c\neq 0$
$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$	**Division** durch $c\neq 0$
$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$	**Kehrwert** $(a,b\neq 0)$

Ungleichung $a<b$

$a\pm c<b\pm c$

$$\begin{cases} a\cdot c<b\cdot c & \text{falls } c>0 \\ a\cdot c>b\cdot c & \text{falls } c<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{c}<\frac{b}{c} & \text{falls } c>0 \\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c} & \text{falls } c<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a}<\frac{1}{b} & \text{falls } a\cdot b<0 \\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b} & \text{falls } a\cdot b>0 \end{cases}$$

Sample

bitte ausschneiden

2.4 Termumformungen, Binomischer Satz

Binomische Formeln:

- **1. Bin. Formel:** $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
- **2. Bin. Formel:** $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
- **3. Bin. Formel:** $\boxed{(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2}$

- $a^2 + b^2$ reell nicht zerlegbar.
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

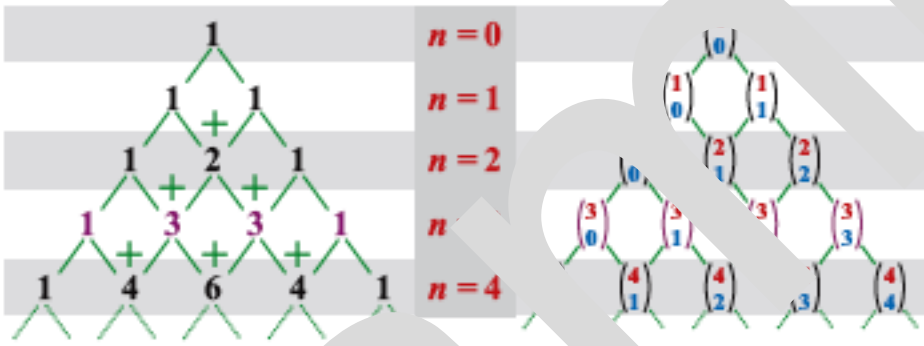
Binomischer Satz:

$$\boxed{(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} a^0 b^n \quad \sum_{k=0} \binom{n}{k} \ldots {}^{-k} b^k}$$

Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Fakultät: $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$, $\ldots 1! = 1$

Für $(a-b)^n$ ist das Vorzeichen *alternierend*: $(a-b) \ldots = a^3 - \ldots + 3a \ldots b^3$

Binomischer Satz und pascalsches Zahlendr[illegible]k:



$\ldots = 1$

$(a + \ldots = 1a^1 + 1b^1$

$(a+b)^2 \ldots a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$

2.5 B[illegible]echn[illegible]

[illegible]tion:
Subtraktion:

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{a\,y}{b\,y} \pm \frac{x\,b}{y\,b} = \frac{a\,y \pm x\,b}{b\,y}} \quad (b, y \neq 0)$$

- Hauptnenner: kgV(b, y),
- Brüche auf HN erweitern,
- Zähler addieren.

Multiplikation:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y}} \quad (b, y \neq 0)$$

- „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner".

Division, Doppelbrüche:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}} \quad (b, x, y \neq 0)$$

- Division durch Bruch = Multiplikation mit dessen Kehrwert.

Sample

2.6 Potenzen

Definition: $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$ heisst n-te Potenz von a. Bezeichnungen: $\begin{cases} a = \text{Basis} \\ n \in \mathbb{N} = \text{Exponent} \end{cases}$

Insbesondere: $a^1 = a$ und $\begin{cases} a^0 = 1, & \text{falls } a \neq 0 \\ 0^n = 0, & \text{falls } n > 0 \end{cases}$

- **Negative Exponenten $\Rightarrow$ Nenner:** $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $\quad a \neq 0$
- **Rationale Exponenten $\Rightarrow$ Wurzeln:** $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $\quad a \geq 0, \quad n > 0$

  speziell: $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ Quad[illegible]urzel: [illegible]

Potenzsätze

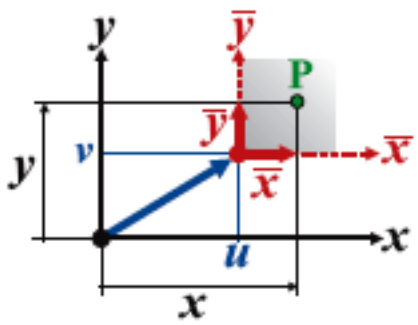
- **Gleiche Basis:** $\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\quad \boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ [illegible] 0
- **Gleicher Exponent:** $\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$ $\quad \boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$ $\quad b \neq 0$
- **Doppelte Potenzen:** $\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}}$

2.7 Logarithmen (siehe auch S. [illegible])

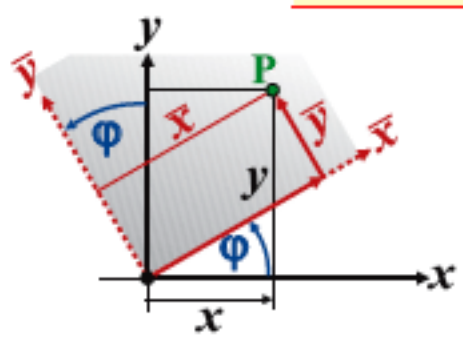
- **Definition** $\boxed{\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x}$ $\quad a, x > 0, \quad a \neq 1$
- $\begin{cases} \text{Multiplikation} \\ \text{Division} \end{cases}$ $\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)}$ $\quad \boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$
- **Potenzen** $\boxed{\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)}$ $\quad x > 0$
- **Basiswechsel** $\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}$ $\quad a > 0; \ a \neq 1$, $b > 0; \ b \neq 1$ $\quad$ speziell: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

2.8 Translation und Rotation des Koordinatensystems

Translation um $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: $\boxed{\begin{aligned} \overline{x} &= x - u \\ \overline{y} &= y - v \end{aligned}}$



Rotation um φ: $\boxed{\begin{aligned} \overline{x} &= x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) \\ \overline{y} &= -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{aligned}}$

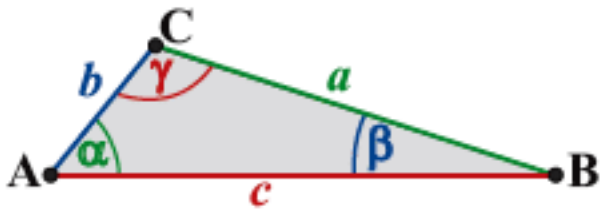


Sample

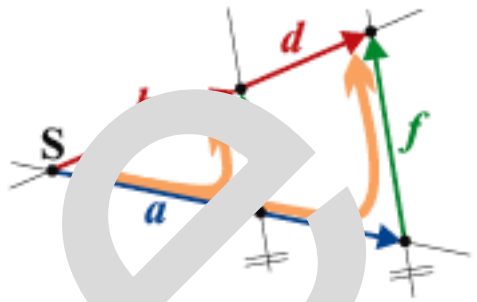
bitte ausschneiden

3 Planimetrie

3.1 Allgemeine Dreiecke



- **Winkelsumme:** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- **Dreiecksungleichung:** $c < a + b$
- **Ähnlichkeit, Strahlensätze:** Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie **gleiche Winkel** und / oder **gleiche Seitenverhältnisse** haben.



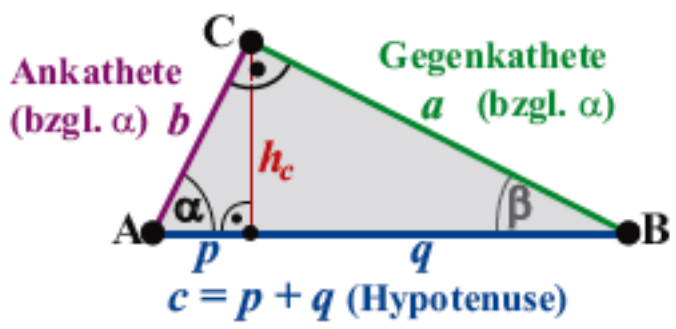
  1. Strahlensatz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

  2. Strahlensatz: $\frac{a}{e} = \frac{a+c}{f}$

- **Sinussatz:** $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$ wob[illegible] R = [illegible]reisra[illegible].
- **Cosinussatz:** $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)$ [illegible] zyklisch: [illegible]
- **Fläche:** $A_\Delta = \frac{1}{2}$ (Grundseite · [illegible]öhe) = [illegible] $= \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$
  - ▶ **Zwei Seiten und Zw[illegible]chenw[illegible]l:** $A_\Delta = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)$ und zyklisch: [illegible]
  - ▶ **Drei Seiten (Heron)** [illegible] $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
  - ▶ **Drei Wi[illegible]el un[illegible]Umkre[illegible]dius R:** $A_\Delta = 2\,R^2 \cdot \sin(\alpha)\,\sin(\beta)\,\sin(\gamma)$

3.2 Re[illegible]rink[illegible]reiecke

[illegible]tz von [illegible]hagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

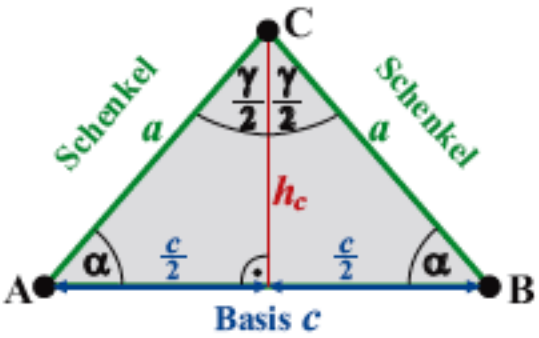


- **Höhens[illegible]** $h_c{}^2 = p \cdot q$
- **Kathetensatz (Satz von Euklid):**
  $a^2 = c \cdot q$ oder $b^2 = c \cdot p$
- **Trigonometrische Funktionen:**
  $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$ (Siehe auch S. 17)

Sample

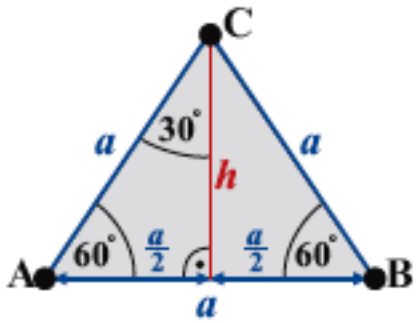
3.3 Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

Gleichschenkliges Dreieck



- h_c halbiert die Basis c und den Winkel γ.

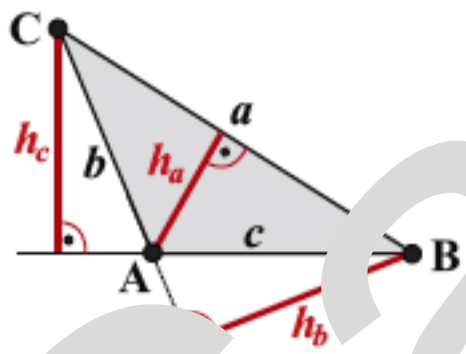
Gleichseitiges Dreieck



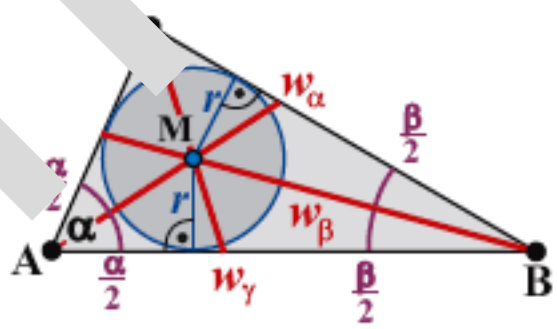
- Höhe: h [illegible] $\sqrt{3}$ a
- Fläche: $A =$ [illegible] a^2
- Umkreisradius: [illegible] $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a
- Inkreis[illegible] $r =$ [illegible] $= \frac{1}{3}$ h

3.4 Linien im Dreieck

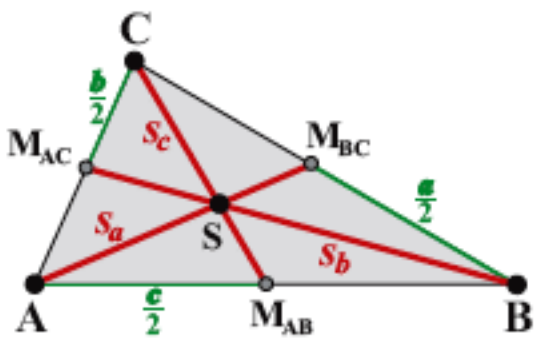
Höhen sind die Verbindungsstrecken von einem Eckpunkt zur gegenüberliegenden Seite (oder deren Verlängerung), welche zu dieser **senkrecht** stehen.



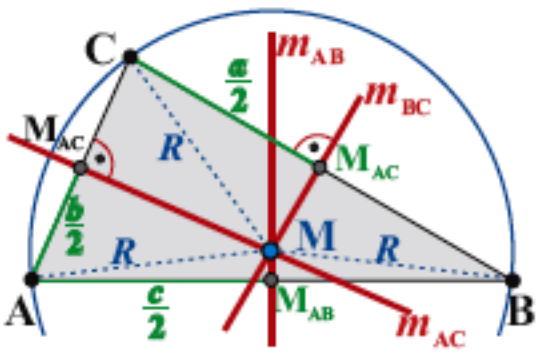
Winkelhalbi[illegible]nde (W[illegible]) halbieren ei[illegible]kel de[illegible]. Jeder Punkt [illegible] einer [illegible]H hat [illegible] den angrenzenden [illegible]iten **gle[illegible]n A[illegible]nd**. Die WH [illegible]eiden sich [illegible] **Inkrei[illegible]ittelpunkt**.



Se[illegible]enhalbier[illegible] [illegible]aufen [illegible] einem Ec[illegible]kt [illegible] Seitenm[illegible]elpunkt der gegenüb[illegible]genden Seite. [illegible] schneiden sich im Verhältnis 2:1 Ihr S[illegible]nittpunkt ist der **Schwerpu[illegible]** (M[illegible]mittelpunkt) des Dreiecks (vg[illegible]).



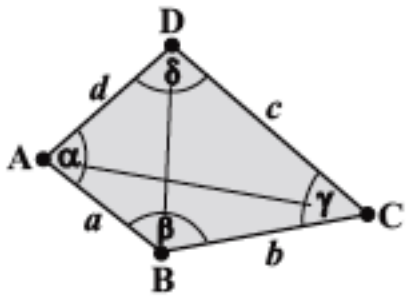
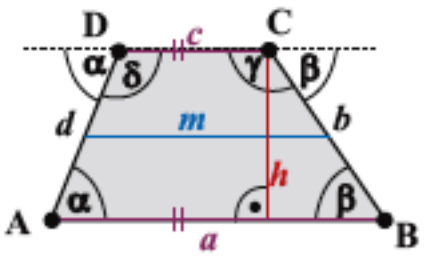
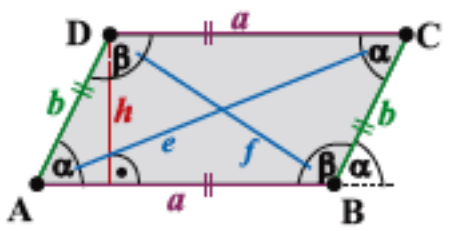
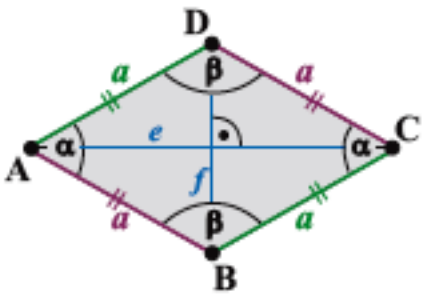
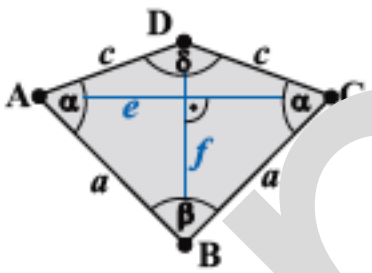
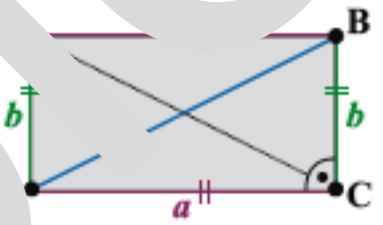
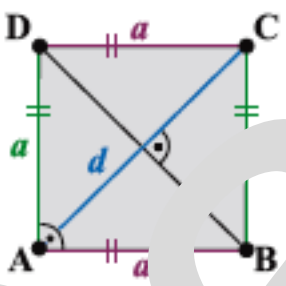
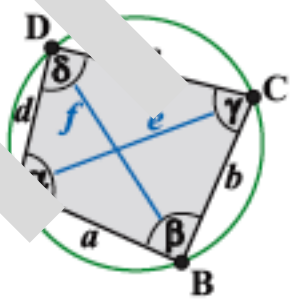
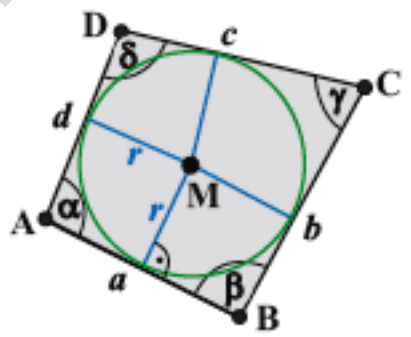
Mittelsenkrechte sind die Menge aller Punkte, welche von zwei Eckpunkten **gleichen Abstand** haben. Sie schneiden sich im **Umkreismittelpunkt**.



Sample

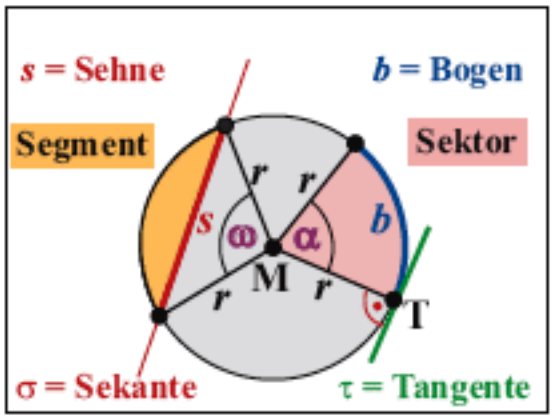
bitte ausschneiden

3.5 Vierecke

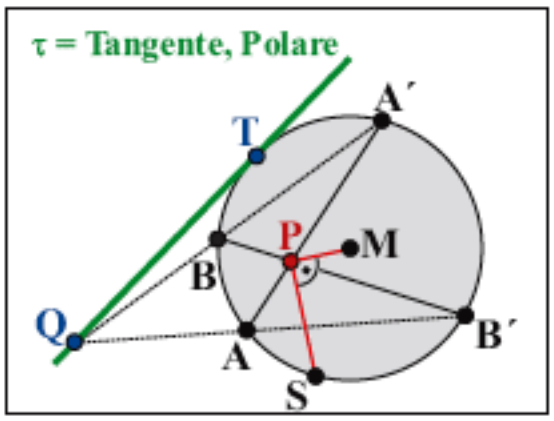
Allgemeines Viereck  ► $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$	**Trapez**  ► $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$	**Parallelogramm**  ► $A =$ [illegible] $a =$ [illegible] $\cdot \sin(\alpha)$
Rhombus (Raute)  ► $A = \frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \sin(\alpha)$	**Drachenviereck**  ► $A =$ [illegible] $= a^2 \cdot \sin($ [illegible]	**Rechteck**  ► $A = a \cdot b$
Quadrat  ► $A = a^2$ ► $d =$ [illegible]	**Sehnenviereck**  ► $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$ ► $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$	**Tangentenviereck**  ► $a + c = b + d$ ► $A = r \cdot \frac{a+b+c+d}{2}$

Sample

3.6 Kreis



Umfang	$U = 2\pi r$
Bogenlänge	$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$
Fläche	$A = \pi r^2$
Sektor	$A_{\text{Sek}} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{br}{2}$



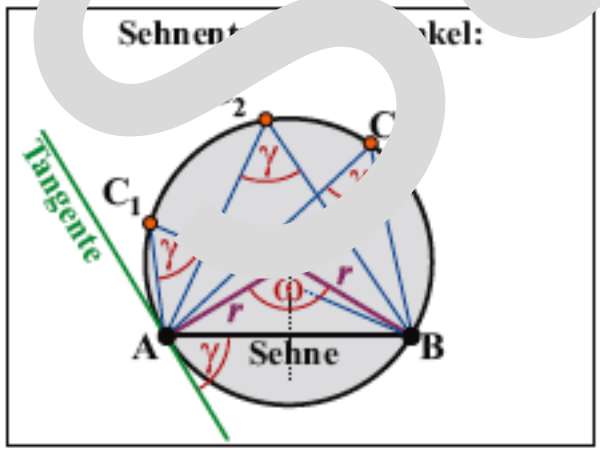
Segment	$A_{\text{Seg}} = \pi r^2 \cdot \frac{\omega}{360°} - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin(\omega)$
Sehnensatz	$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = r^2$
Sekantensatz	$\overline{QP} \cdot \overline{QA'} = \overline{QA} \cdot \overline{QB'} = \overline{QT}^2$

▶ **Kreisgleichung** des Kreises K mit Mittelpunkt $M(u \,/\, v)$ und Radius r:

- **Mittelpunktsform:** $K: (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$
- **Koordinatenform:** $K: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
- **Tangente** τ an K in $T(x_0 \,/\, y_0)$ bzw. **Polare** τ an K in $Q(x_0 \,/\, y_0)$:

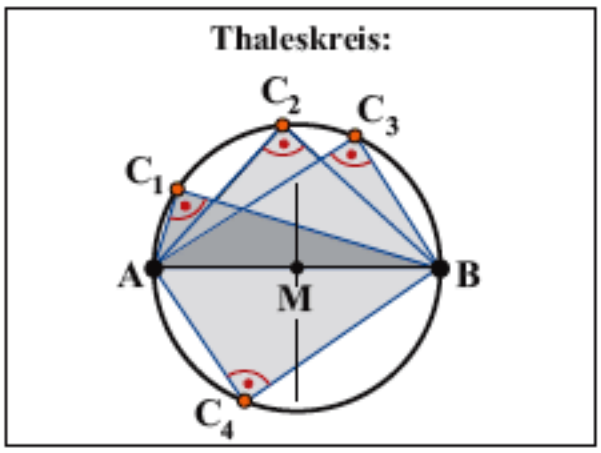
$$\tau: (x-u)(x_0-u) + (y-v)(y_0-v) = r^2$$

Kreiswinkelsätze



▶ gleiche Peripheriewinkel γ

▶ Zentriwinkel $\omega = 2\gamma$



▶ gleiche Peripheriewinkel $\gamma = 90°$

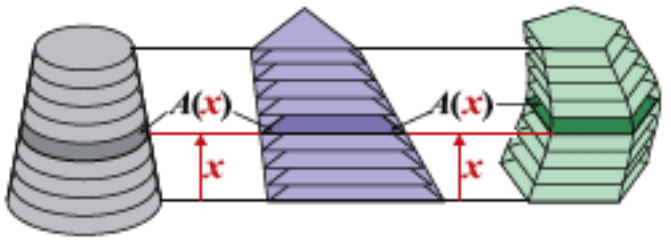
Sample

bitte ausschneiden

4 Stereometrie

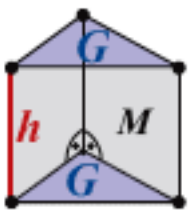
4.1 Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper sind volumengleich, wenn deren Schnittfläche $A(x)$ in jeder Höhe x den gleichen Flächeninhalt haben.

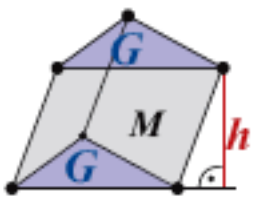


4.2 Prismen und Zylinder (Kongruente, parallele Grund- und Deckfläche)

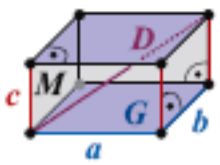
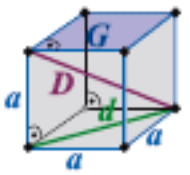
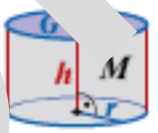
Gerades Prisma



Schiefes Prisma

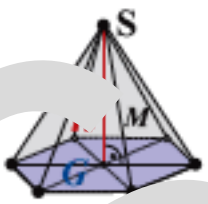


- G = Grundfläche M = Mantelfläche
- h = Höhe
- Volumen: $V = G \cdot h$
- Oberfläche: $A = G + M$

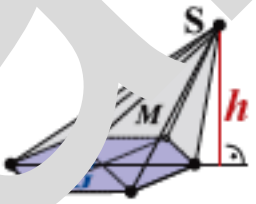
Quader	Würfel	Zylinder
		
$V = a\,b \cdot c$	$V =$	$V = \pi\, r^2 \cdot h$
$A = 2(a\,b + a\,c + b\,c)$	$A = 6\,a^2$	$A = 2 \cdot \pi\, r^2 + 2\pi\, r \cdot h$
$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$D = \sqrt{3}$, $d = a\sqrt{2}$	$M = 2\pi\, r \cdot h$

4.3 Spitze Körper

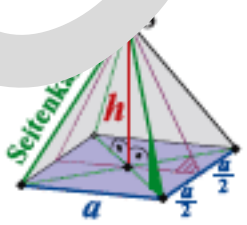
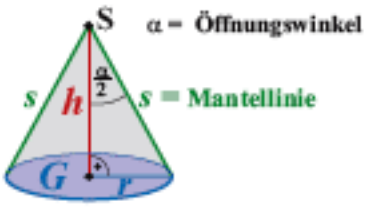
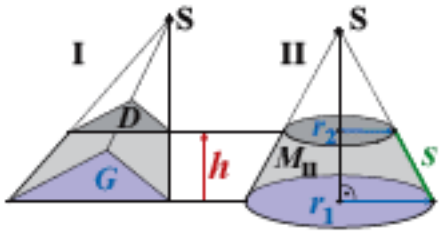
Gerade Pyramiden



Schiefe Pyramiden

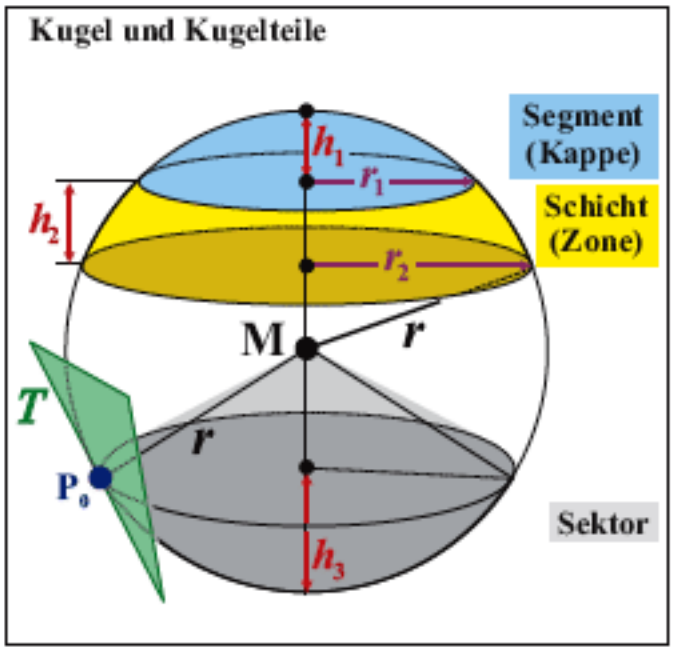


- G = Grundfläche M = Mantelfläche
- h = Höhe
- Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
- Oberfläche: $A = G + M$

Gerade, quadratische Pyramide	Gerader Kreiskegel	Pyramidenstumpf, Kegelstumpf
		
$V = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$	$V = \frac{1}{3}\, \pi r^2 \cdot h$	$V_{\mathrm{I}} = \frac{h}{3}\,(G + \sqrt{GD} + D)$
$A = a^2 + M$	$A = \pi r^2 + \pi r s$, $M = \pi r s$	$V_{\mathrm{II}} = \frac{\pi h}{3}\,({r_1}^2 + r_1 r_2 + {r_2}^2)$
$s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$	$s = \sqrt{h^2 + r^2}$	$M_{\mathrm{II}} = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

Sample

4.4 Kugel



Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- ▶ **Segment:** $V = \frac{1}{3}\pi {h_1}^2 (3r - h_1)$
- ▶ **Schicht:** $V = \frac{1}{6}\pi h_2 (3{r_1}^2 + 3{r_2}^2 + {h_2}^2)$
- ▶ **Sektor:** $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h_3$

Oberfläche: $A = 4\pi r^2$

- ▶ **Segment:** $M = 2\pi r\, h_1$ (K[illegible]pe, H[illegible])
- ▶ **Schicht:** $M = [illegible] r\, h_2$ (Z[illegible])
- ▶ **Sektor:** $A = 2\pi r[illegible] + \pi r\sqrt{[illegible] - h_2^2}$

▶ **Kugelgleichung** einer Kugel mit Mittelpunkt $M(u\ /\ v\ /\ [illegible])$ u[illegible]dius [illegible]

- **Mittelpunktsform:** $K:\ (x-u)^2 + (y-v)^2 + ([illegible]\ w)^2 = r^2$
- **Koordinatenform:** $K:\ x^2 + y^2 + z^2 + A[illegible] + By + C[illegible] + D = 0$
- **Tangentialebene** T an Kugel im Punk[illegible] $P_0(x_0\ /\ [illegible]\ /\ z_0)$:

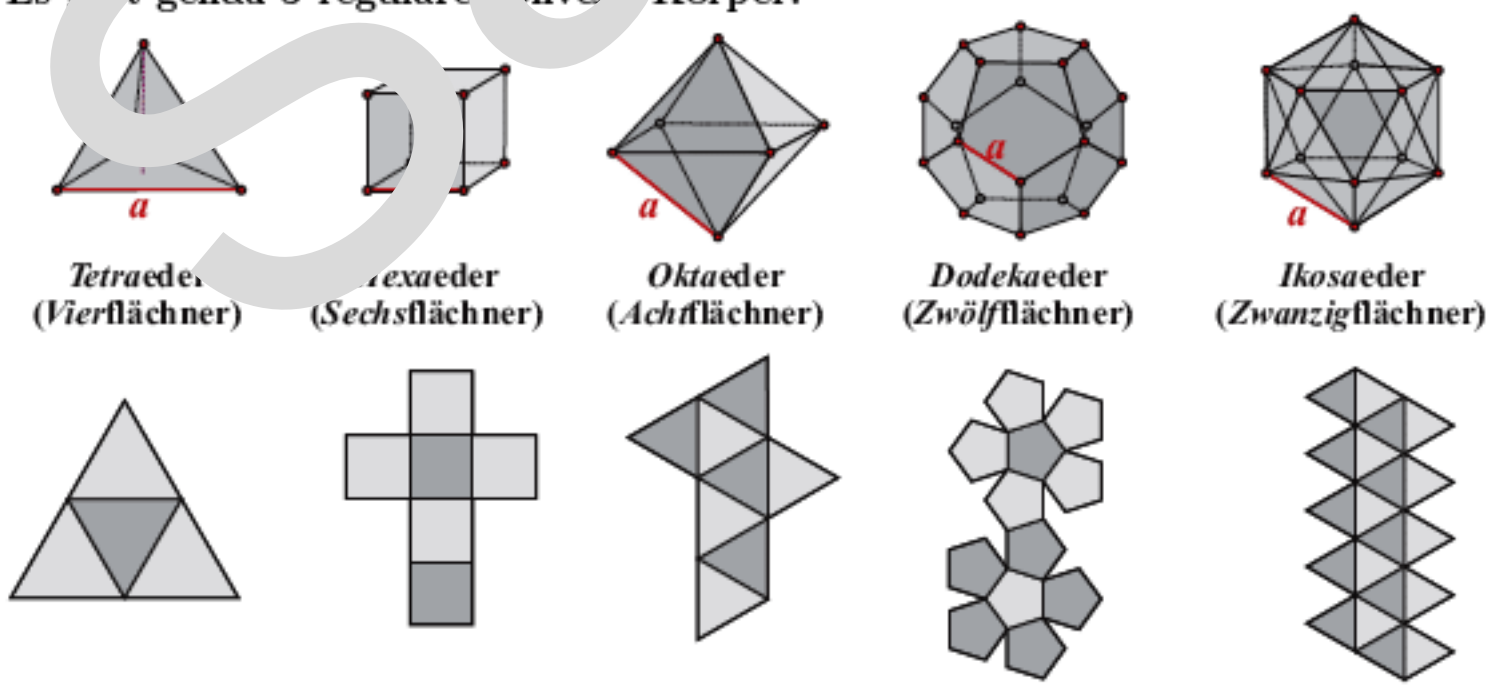
$$T:\ (x-u)(x_0-u) + (y-v)(y_0[illegible]) [illegible] - w)(z_0 - [illegible] = r^2$$

4.5 Polyeder und P[illegible]nisch[illegible] Körper

Polyedersatz (Euler):

$e + f = k + 2$ wobei: [illegible] = Anz[illegible] E[illegible] f = Anzahl Flächen, k = Anzahl Kanten.

Es [illegible] genau 5 reguläre [illegible]onvex[illegible] Körper:



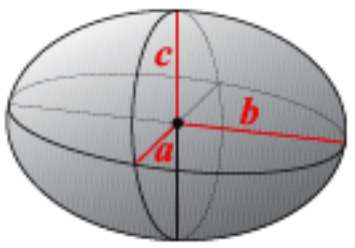
Sample

bitte ausschneiden

	Volumen V	Oberfläche A	Umkugelradius R	Inkugelradius r
Tetraeder	$\frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3$	$\sqrt{3}\,a^2$	$\frac{\sqrt{6}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}\,a$
Hexaeder	a^3	$6\,a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$	$\frac{1}{2}\,a$
Oktaeder	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3$	$2\sqrt{3}\,a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}\,a$
Dodekaeder	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\,a^3$	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\,a^2$	$\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}\,a$	$\sqrt{\frac{10+4.4\sqrt{5}}{}}\,a$
Ikosaeder	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}\,a^3$	$5\sqrt{3}\,a^2$	$\sqrt{\frac{10+\sqrt{5})}{}}\,a$	$\frac{(3+\sqrt{5})}{12}\,a$

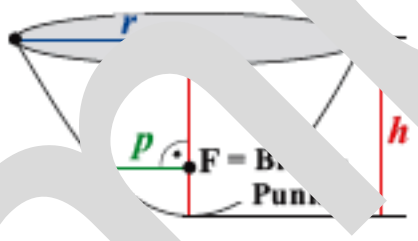
4.6 Körper mit runden Begrenzungsf

Ellipsoid



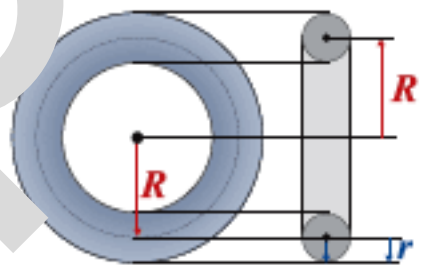
▶ $V = \frac{4}{3}\,\pi\,a\,b\,c$

Paraboloid



$V = \frac{1}{2}\,\pi\,r$ $\pi\,p\,h^2$

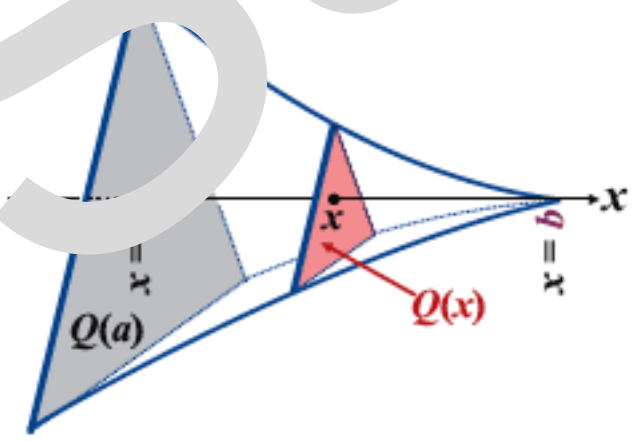
us (Ring)



▶ $V = 2\pi^2\,r^2\,R$

▶ $A = 4\pi^2\,r\,R$

4.7 Volumen es Körpers mit Integralrechnung



- $\boxed{V = \int_a^b Q(x)\,dx}$
- Spezialfall Rotationsvolumen: Durch $f(x)$ begrenztes Volumen, wenn diese um die x-Achse rotiert:

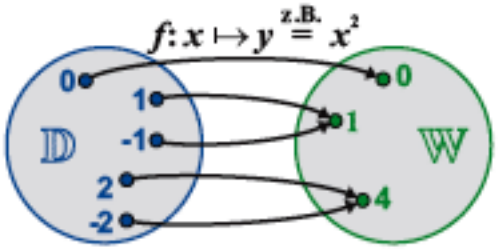
  $V_x = \pi \int_a^b (\,f(x)\,)^2\,dx.$ Siehe S. 25.

Sample

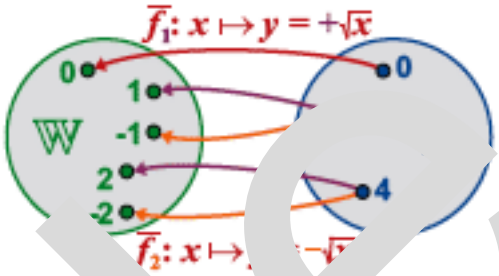
5 Funktionen

Definition: Eine **Funktion** $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ ist eine **Zuordnungsvorschrift** von einer Zahlenmenge $\mathbb{D}$ (Urbild, Definitionsmenge) nach $\mathbb{W}$ (Bild, Wertemenge), welche **jedem** Element $x \in \mathbb{D}$ **genau ein** $y \in \mathbb{W}$ zuordnet:

$$\boxed{f: x \mapsto y = f(x)}$$



Umkehrfunktion: $\overline{f}: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ macht die Funktion f „rückgängig": $\overline{f}(\,f(x)\,) = x$ und $f(\,\overline{f}(y)\,) = y$



Damit eine auf einem Intervall definierte Funktion eindeutig umkehrbar ist, muss deren maximaler Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ so eingeschränkt werden, dass f streng monoton wird.

Ermittlung der Umkehrfunktion(en):

- ▶ *Graphisch:* Funktionsgraph an der 1. Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln.
- ▶ *Algebraisch:* $y = f(x)$ nach x auflösen, anschliessend x und y vertauschen.

Definit sbere Menge aller erlaub x-Wer

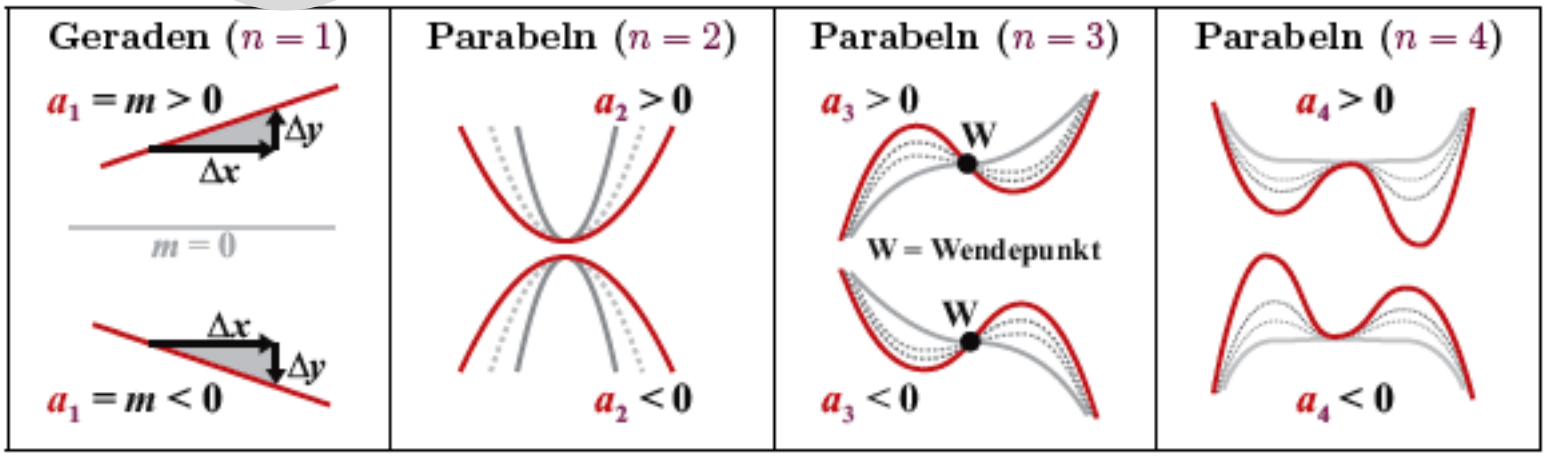
- $\frac{}{V(x)}$ $V(x)$ 0
- $\sqrt{g(x)}$ $g(x) \geq 0$
- $\log_a(g($ $\Rightarrow$ $g(x) > 0$

Tabelle von Funktionen und Umkehrfun

Funktion	$y = f(x)$	$\mathbb{D}_f$	$\mathbb{W}_f$	$y = \overline{f}(x)$
Kehrwert	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R}\backslash\{0$	$\mathbb{R}$ $\}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Quadrat	x^2	$\mathbb{R}$	$y \geq 0$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
Potenz	x^n	$\mathbb{R}$	fa n gerade: $y \geq 0$ falls n ungerade: $\mathbb{R}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
Sinus	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,\ 1]$	$\arcsin(x)$
Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,\ 1]$	$\arccos(x)$
Tang	$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{(n+\frac{1}{2})\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
Ex nential	a^x	$\mathbb{R}$	$y > 0$	$\log_a(x)$

5.1 Polynomfunktionen („Parabeln n-ter Ordnung")

$$\boxed{y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$$ mit n = Grad, Ordnung. ($a_n \neq 0$)



Sample

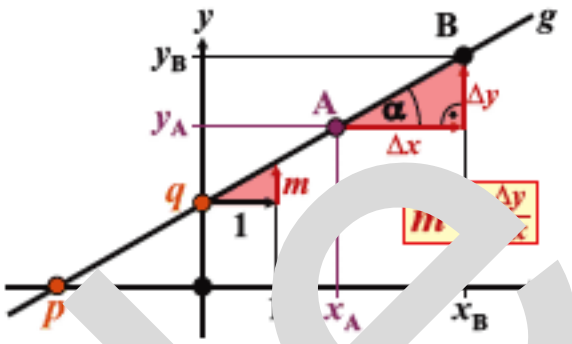
bitte ausschneiden

5.2 Geraden, lineare Funktionen

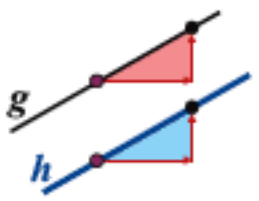
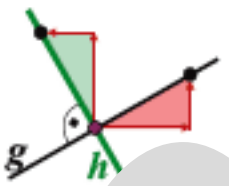
▶ **Normalform:** $\boxed{g:\ y = m \cdot x + q}$

▶ **Punkt-Steigungsform:** $\boxed{g:\ y = m \cdot (x - x_A) + y_A}$ mit $A(x_A\ /\ y_A) \in g$

- **Steigung:** $\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\alpha)}$
- **y-Achsenabschnitt:** q.

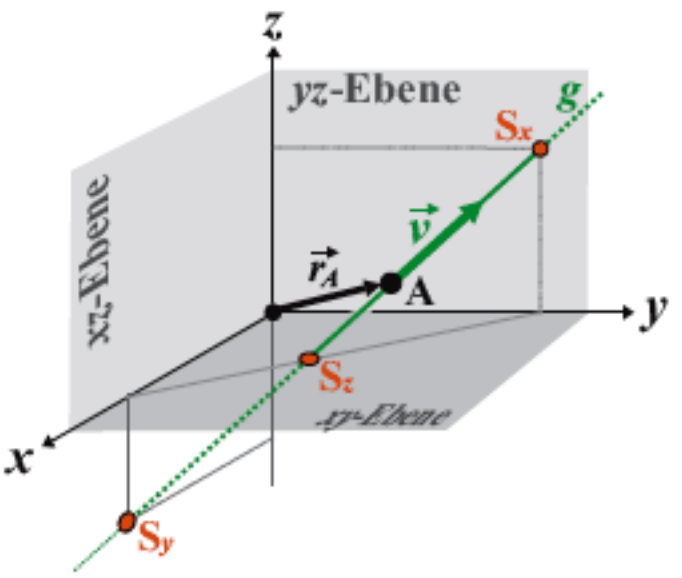


▶ **Achsenabschnittsform:** $\boxed{g:\ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$ mit den Achsenabschnitten $p,\ q \neq 0$

Parallele Geraden	Senkrechte Geraden	Schnittwinkel von g und h
		
$g \parallel h \Leftrightarrow m_g = m_h$	$g \perp h \Leftrightarrow m_h = \frac{-1}{m_g}$	$\tan(\varphi) = \left\lvert \frac{m_h - m_g}{1 + m_h \cdot m_g} \right\rvert$

▶ **Parameterform:** $\boxed{t \mapsto \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{v}}$

- **Richtungsvektor:** beliebiger Vektor in Richtung von g.
- **Aufpunkt:** Beliebiger Punkt A auf g.
- **Spurpunkte:** S_x, S_y, S_z = Schnittpunkte von g mit einer der Koordinatenebenen.



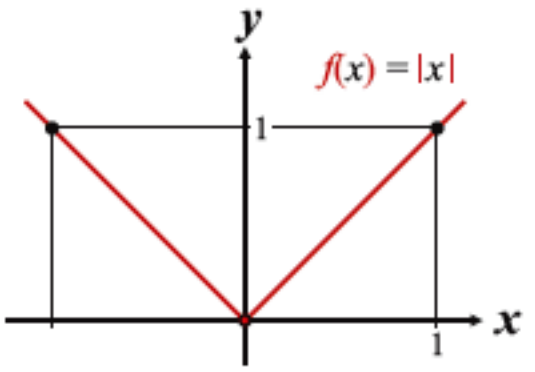
⇒ **Ebenengleichungen siehe S. 29.**

5.3 Betragsfunktion

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

„macht x positiv".

$|x|$ ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.



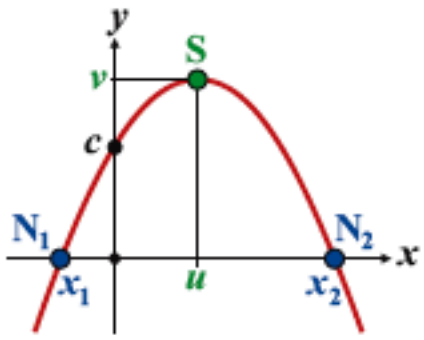
Sample

5.4 Parabeln

▶ **Normalform:**

$p: \; y = a\,x^2 + b\,x + c$

- Öffnung a:
  $a < 0$: nach unten geöffnet
  $a > 0$: nach oben geöffnet
  $a = 1$: Normalparabel.
- $b\,x$: Linearer Term.
- c: y-Achsenabschnitt.



▶ **Scheitelpunktsform:**

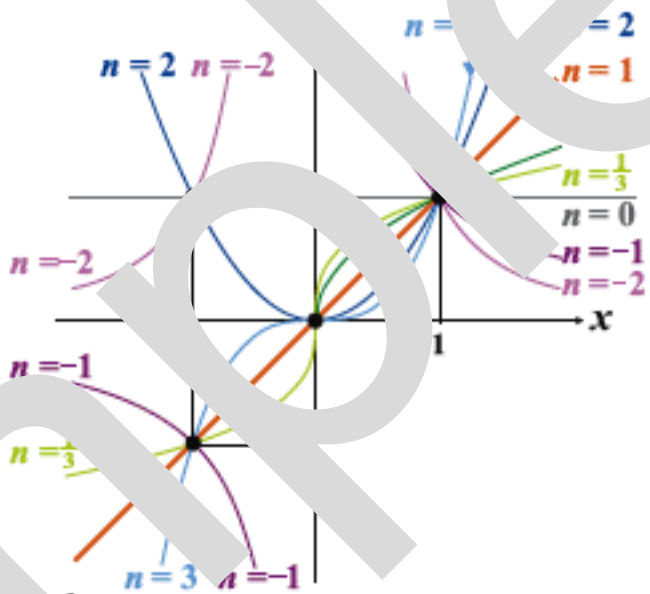
$p: \; y = a\,(x-u)^2 + v$

- Öffnung a:
  Siehe Normalform.
- Scheitelpunkt $S(u \,/\, v)$ mit
  $u = -\frac{b}{2a}; \quad v = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

5.5 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen: $f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{Q}$

$n = 0$	Konstante Funktion.
$0 < n < 1$	Wurzelfunktionen.
$n = 1$	Lineare Funktion.
$n \in \mathbb{N};\; n > 1$	Parabeln n-ter Ordnung.
$n \in \mathbb{N};\; n < 0$	Hyperbeln n-ter Ordnung.



Der Graph von $f(x) = x^n$ ist...

- ...spiegelsymmetrisch zur y-Achse, falls n gerade.
- ...punktsymmetrisch zum Ursprung, falls n ungerade.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 24.

5.6 Gebrochenrationale Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion $f(x)$ ist eine Funktion von folgender Bauart:

$$\frac{U(x) = \text{Zählerpolynom}}{V(x) = \text{Nennerpolynom}} = \frac{a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0}{b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots + b_1\,x + b_0}$$

$\mathbf{n, m} \in \mathbb{N}_0$
$a_n, b_m \neq 0$

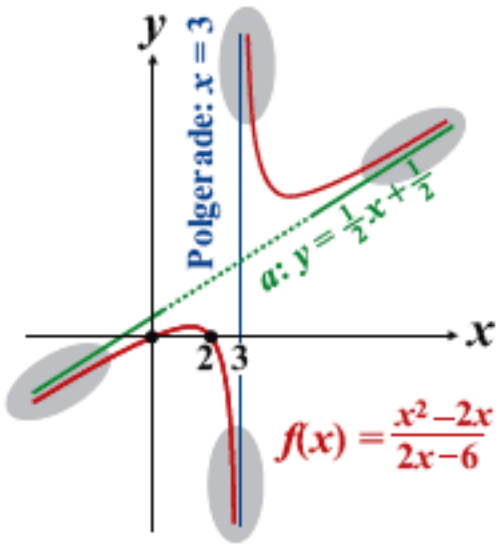
▶ **Polgeraden (vertikale Asymptoten):** $y \to \pm\infty$
x_0 heisst Polgerade, wenn

$y = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ („echte" Division durch Null).

▶ **Asymptote**: Anschmiegfunktion $a(x)$ mit

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - a(x) \right) = 0$$

Für $n = m + 1$ ist die Asymptote eine schiefe Gerade.



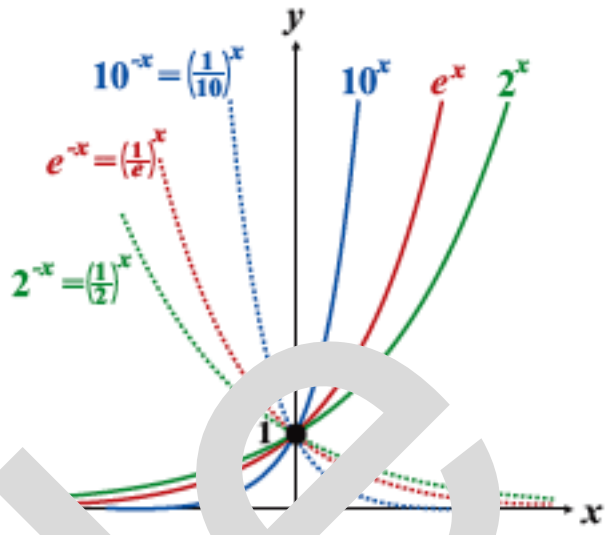
Sample

Parabeln, Potenzfkt.

bitte ausschneiden

5.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

▶ **Exponentialfunktion:** $\boxed{y = f(x) = a^x}$ $\quad a > 0$



- **Eulersche Zahl:** $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718\ldots$.
- Wachstums- oder Zerfallsprozesse:

  $\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t}$ wobei:

  t = Zeit, $\quad N_0$ = Startwert,

  $N(t)$ = Population zur Zeit t,

  $\boxed{a = 1 + \frac{p}{100}}$ = Wachstumsfaktor mit

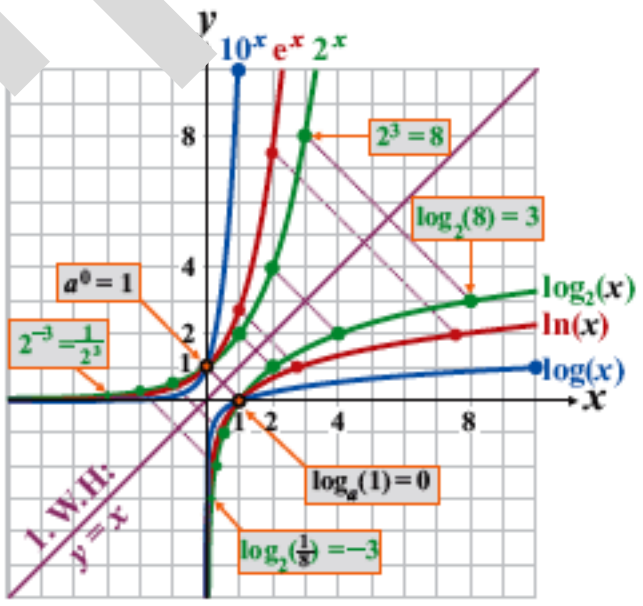
  p = Wachstum in % pro Zeiteinheit.
- Siehe auch S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 24.

▶ **Logarithmusfunktionen** (**Logarithmens[illegible]e siehe S[illegible]):**

$\boxed{\overline{f}(x) = \log_a(x)}$ $\quad x > 0$, $\quad a > 0;\ a \neq 1$

$\overline{f}(x) = \log_a(x)$ ist Umkehrfunktio[illegible] $(x) = a^x$:



- Zehnerlogarithmus:

  $\overline{f}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$

  $\log(10^x) =$ [illegible] $10^{\log(x)} =$ [illegible] $\quad (x > 0)$
- Natürliche [illegible]Logarit[illegible]

  [illegible]$) = \log_e(x)$ [illegible]$n(x)$

  $\ln(e^x) = x,$ [illegible] $e^{\ln(x)}$ [illegible] $x \quad (x > 0)$
- B[illegible]rithmus:

  $f(x) = \log_2$ [illegible] $) = \mathrm{lb}(x)$

  $\log_2(2^x$ [illegible] $x, \quad 2^{\log_2(x)} = x \quad (x > 0)$

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 24.

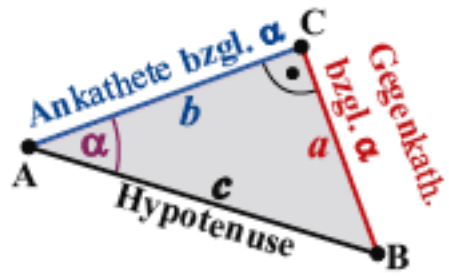
Sample

5.8 Trigonometrische Funktionen

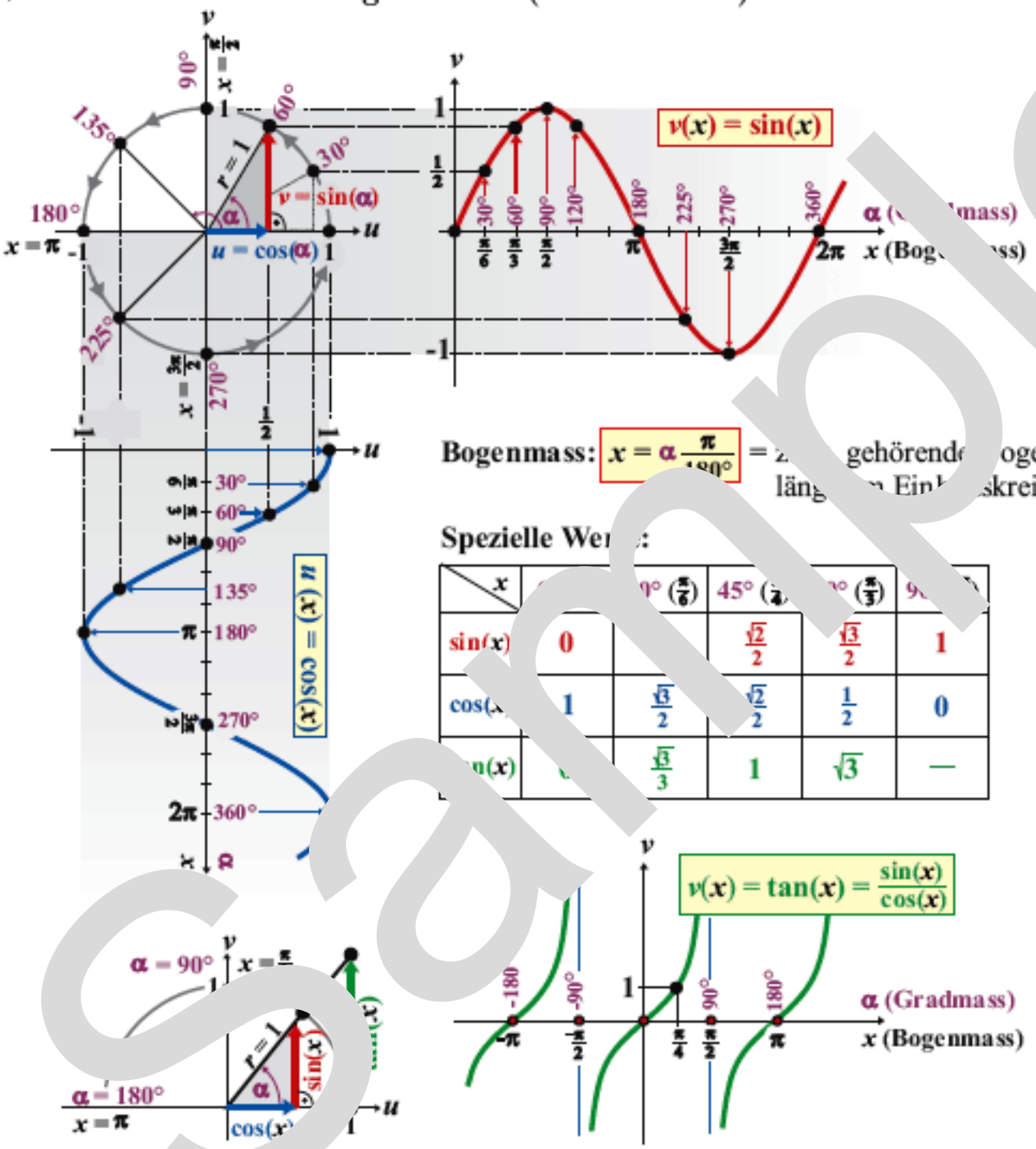
▶ **Definition im rechtwinkligen Dreieck:** $0 < \alpha < 90°$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$ (vgl. S. 6)



▶ **Definition für beliebige Winkel (Einheitskreis)**



Bogenmass: $x = \alpha \frac{\pi}{180°}$ = zu gehörende Bogenlänge im Einheitskreis.

Spezielle Werte:

x	0	30° ($\frac{\pi}{6}$)	45° ($\frac{\pi}{4}$)	60° ($\frac{\pi}{3}$)	90° ($\frac{\pi}{2}$)
$\sin(x)$	0	[illegible]	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	[illegible]	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

▶ **Eigenschaften:**

- **Periodizität:** 360° (= 2π im Bogenmass) für sin und cos; 180° (= π) für tan:
  $\sin(x + n \cdot 2\pi) = \sin(x)$
  $\cos(x + n \cdot 2\pi) = \cos(x)$
  $\tan(x + n \cdot \pi) = \tan(x),\ n \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{D}_{\cos} = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \{(\frac{\pi}{2} + n\pi),\ n \in \mathbb{Z}\}$.
  $\mathbb{W}_{\sin} = \mathbb{W}_{\cos} = [-1, 1]$, $\mathbb{W}_{\tan} = \mathbb{R}$
- **Umkehrfunktionen:** $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ und $\arctan(x)$ (vgl. S. 13)

Sample

bitte ausschneiden

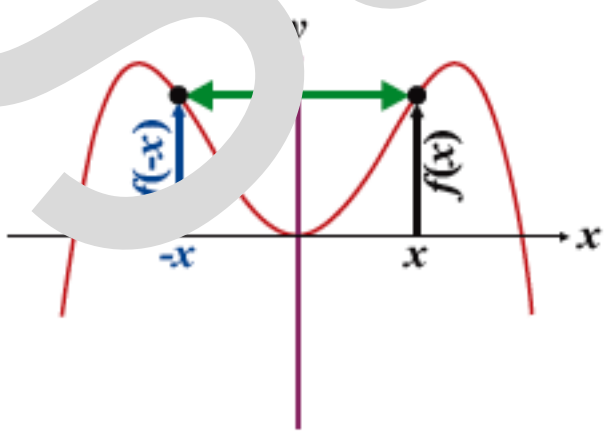
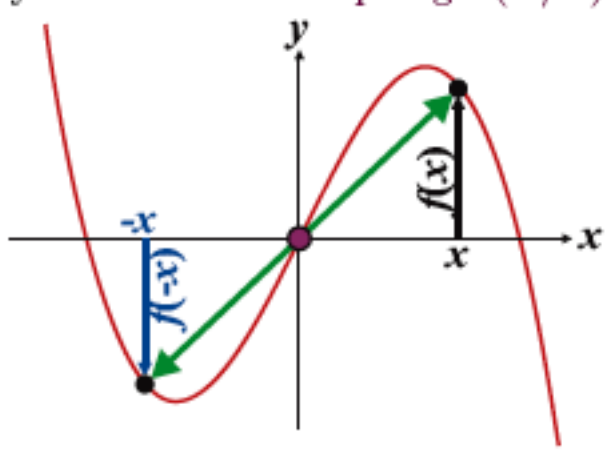
Beziehungen und Eigenschaften trigonometrischer Funktionen

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp\sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp\frac{1}{\tan(x)}$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	$\cos(2x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2\sin^2(x) \end{cases}$	$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{2}$	$\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos(x)}{2}$	$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	
$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 24.

5.9 Symmetrie

Gerade Funktionen: Graph Spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse  $f(-x) = f(x)$	**Ungerade Funktionen:** Graph Punktsymmetrisch zum Ursprung O(0 / 0)  $f(-x) = -f(x)$

Sample

6 Gleichungen

6.1 Fundamentalsatz der Algebra

In $\mathbb{R}$ kann jedes Polynom n-ten Grades als Produkt von $k \leq n$ Linearfaktoren und nicht weiter zerlegbaren quadratischen Faktoren $q(x)$, welche nicht Null werden können, dargestellt werden.

$$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot q(x) = 0$$

In der faktorisierten Form können die Lösungen $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k$ abgelesen werden.

6.2 Quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

Diskriminante: $D = b^2 - 4\,a\,c$

Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \quad D \geq 0$

Satz von Vieta:

Produkt der Lösungen: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Summe der Lösungen: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

6.3 Polynomgleichungen dritten und höherer Grades

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

Satz: Division durch $a \neq 0$ führt auf [illegible] also $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$. Wenn es eine ganzzahlige Lösung x_1 gibt, dann ist diese Teiler von d'. Finde Lösung x_1 durch Einsetzen (Probieren) der Teiler von d' und dividiere die Gleichung anschliessend durch $(x - x_1)$.

6.4 Numerische Verfahren zur Nullstellenberechnung

Gesucht ist die Nullstelle $N(x_N / 0)$ von $f(x)$. Ausgehend von einem Startwert x_1, konstruiere eine rekursiv definierte Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit Grenzwert x_N.

- **Sekantenverfahren (Regula falsi)**

  Wähle $P_1(x_1 / f(x_1))$ und $P_2(x_2 / f(x_2))$ mit $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Dann:

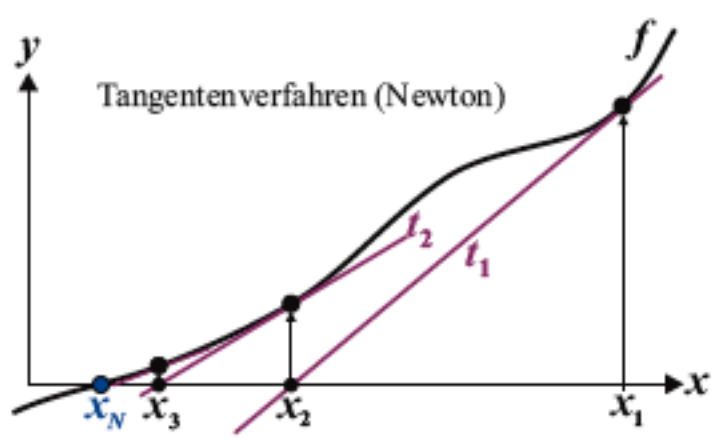
  $$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_N$$

- **Tangentenverfahren von Newton**

  Wähle $P_1(x_1 / f(x_1))$ mit $f'(x_1) \neq 0$. Dann:

  $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_N$$

  (die Folge ist nicht notwendigerweise konvergent.)



Sample

bitte ausschneiden

7 Folgen und Reihen

Definition: Eine **Zahlenfolge** $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ ist eine **Funktion** $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad k \mapsto a_k$.

- **Explizite Funktionsvorschrift:** $a_k = \{\text{Formel mit } k\}$
- **Rekursive Darstellung:** $a_{k+1} = \{\text{Formel mit } a_k,\ a_{k-1}, \ldots\}$ sowie Startwert a_1.

Definition: Eine **Reihe** $s_1 = a_1,\ \ s_2 = a_1 + a_2,\ \ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots$ $\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$

ist die Folge der Teilsummen einer gegebenen Folge $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

7.1 Arithmetische Folgen (AF) und arithmetische Reihen (AR)

	Rekursionsformel	Explizite Formel
Folge	$a_{k+1} = a_k + d$	$\boxed{a_k = a_1 + (k-1) \cdot d}$
Reihe	$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$	$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)d)}$

7.2 Geometrische Folgen (GF) und geometrische Reihen (GR)

	Rekursionsformel	Explizite Formel
Folge	$a_{k+1} = a_k \cdot q$	$\boxed{a_k = a_1 \cdot q^{k-1}}$
Reihe	$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$	$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$ $\quad q \neq 1, \quad s_n = n \cdot a_1$ für $q = 1$ $\boxed{s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}}$ falls $\lvert q \rvert < 1$ (unendliche GR)

7.3 Weitere Reihen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \qquad \text{(Harmonische Reihe)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n (n+1) \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2} n (n+1)\right)^2$$

7.4 Verzinsung mit Zinseszins:

Startkaptial K_0, Laufzeit n Jahre:

Endwert: $\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$

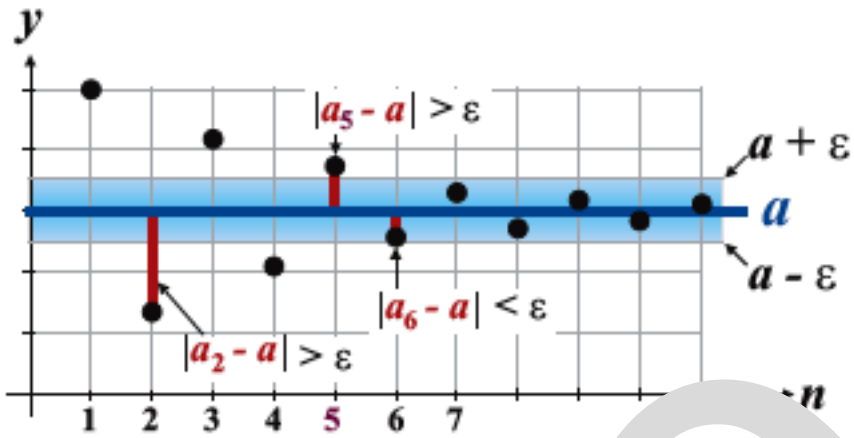
Barwert: $\boxed{K_0 = K_n \cdot \frac{1}{q^n}}$

Sample

7.5 Grenzwerte

Definition: Eine Folge a_n heisst **konvergent** mit Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wenn es zu **jeder** beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt: $\boxed{|a_n - a| < \varepsilon}$

Für (beliebig) grosse n wird der Abstand von a_n zum Grenzwert a beliebig klein (kleiner als jedes $\varepsilon > 0$).



- Folgen ohne Grenzwert oder solche mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ heissen **divergent**.
- **Nicht definiert sind:** $\frac{0}{0}$, $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, $0 \cdot (\pm\infty)$ und $\infty - \infty$

▶ **Grenzwertsätze:** Falls $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existieren, gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim \frac{a_n}{b_n} =$ [illegible] falls $b \neq$ [illegible]

$\Rightarrow$ Entsprechende Sätze gelten auch für Grenzwerte [illegible] $f(x)$.

▶ **Grenzwerte von Exponentialfunktionen:** $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{falls } -1 < a < 1 \\ 1, & \text{falls } a = 1 \\ \infty, & \text{falls } a > 1 \end{cases}$

▶ **Grenzwerte von gebrochen rationalen Funktionen:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{falls } n = m \\ \pm\infty, & \text{falls } n > m \end{cases}$$

▶ **L'Hôpital-Regel:**

- Exponentielles Wachstum ist stärker als Potenzwachstum: $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$
- Potenzwachstum ist stärker als logarithmisches Wachstum: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ für $n > 0$.

▶ **Regel von de l'Hôpital:** Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ (oder ∞) **und** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (oder ∞), dann:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bsp: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

Sample

bitte ausschneiden

7.6 Mittelwerte

Gegeben seien n verschiedene Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- **Ungewichteter arithmetischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{A}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}$ (vgl. S. 33)
- **Gewichteter arithmetischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{A}} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}}$

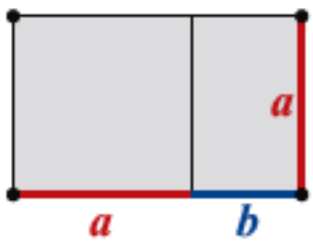
  $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bezeichnen die Gewichte (relative Häufigkeiten) der Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- **Quadratischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{Q}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n{}^2}{n}}}$
- **Geometrischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{G}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots}}$
- **Harmonischer Mittelwert:** $\boxed{\overline{x}_{\mathrm{H}} = n \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\right)^{-1}}$
- Ungleichung: $\overline{x}_{\mathrm{H}} \leq \overline{x}_{\mathrm{G}} \leq \overline{x}_{\mathrm{A}} \leq \overline{x}_{\mathrm{Q}}$ gilt, falls $x_k \geq 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$.

7.7 Harmonische Teilung, Goldener Schnitt

Unter dem Goldenen Schnitt Φ versteht man das harmonische Teilungsverhältnis $\boxed{\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}}$. Daraus folgt:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \Phi = 1.618\ldots \\ \overline{\Phi} = -0.618\ldots \end{cases}}$$

Harmonisches Rechteck:

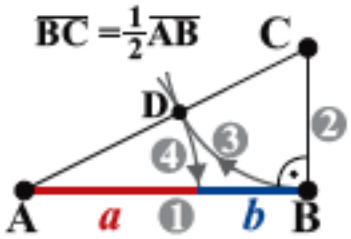


Eigenschaften:

- $\overline{\Phi} = -\frac{1}{\Phi}$
- Φ ist irrational und hat auch folgende Darstellungen:

  $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}$ $\qquad \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}$

Harmonische Teilung der Strecke $\overline{AB}$:



7.8 Vollständige Induktion

Beweisverfahren für Aussagen $\mathbb{A}_n$ über natürliche Zahlen.

(I) **Verankerung:** Überprüfe $\mathbb{A}_1$. (Anstatt $n = 1$ kann ein anderer Startwert gewählt werden, der Beweis gilt dann ab dieser Zahl.)

(II) **Vererbung (Schritt von n nach $n+1$):**
Zeige rekursiv, dass $\mathbb{A}_{n+1}$ korrekt ist, unter der Voraussetzung, dass $\mathbb{A}_n$ stimmt.

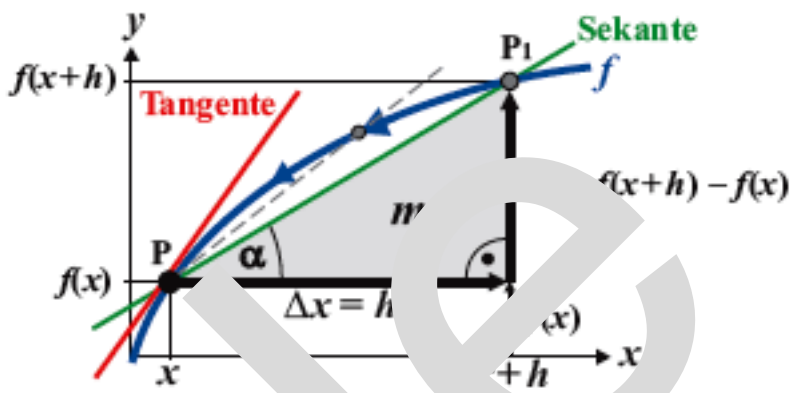
Sample

8 Differentialrechnung

Voraussetzung: Gegeben sei eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x)$.

- **Sekantensteigung:**
  Differenzenquotient,
  Mittlere Änderungsrate (Steigung)
  von f im Intervall $[x,\ x+h]$:

$$\boxed{m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\alpha)}$$



- **Tangentensteigung**
  Differentialquotient,
  Lokale Änderungsrate (Steigung)
  von f in P(x / $f(x)$),
  Definition der 1. Ableitung:

$$\boxed{m_t = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

8.1 Ableitungsregeln:

Seien $f(x)$, $u(x)$ und $v(x)$ stetige Funktionen und c eine Konstante. Dann:

▶ **Additive Konstante:** $f(x) = u(x) + c$

$$\boxed{f'(x) = u'(x)}$$

▶ **Multiplikative Konst.:** $f(x) = c \cdot u(x)$

$$\boxed{f'(x) = c \cdot u'(x)}$$

▶ **Summenregel** $f(x) = u(x) \pm v(x)$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \pm v'(x)}$$

▶ **Produktregel** $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

▶ **Quotientenregel** $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}}$$

▶ **Kettenregel** $f(x) = u(v(x))$

$$\boxed{f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}}$$

„Äussere Ableitung mal innere Ableitung"

8.2 Bedingungen spezieller Punkte:

		f	f'	f''	f'''
Nullstelle	N(x_N / 0)	$f(x_N) = 0$	-	-	-
Hochpunkt	H(x_H / $f(x_H)$)		$f'(x_H) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_H) \overset{\blacklozenge}{<} 0$	-
Tiefpunkt	T(x_T / $f(x_T)$)		$f'(x_T) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_T) \overset{\blacklozenge}{>} 0$	-
Sattelpunkt Terrassenp.	S(x_S / $f(x_S)$)		$f'(x_S) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_S) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f'''(x_S) \overset{\blacklozenge}{\neq} 0$
Wendepunkt	W(x_W / $f(x_W)$)		-	$f''(x_W) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f'''(x_W) \overset{\blacklozenge}{\neq} 0$

$\bigstar$ = notwendige Bedingung, $(\bigstar + \blacklozenge)$ = hinreichende Bedingung.

Sample

bitte ausschneiden

8.3 Ableitungen und Stammfunktionen:

Stammfunktion $F(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $[n \neq -1]$	x^n	$n\,x^{n-1}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x	[illegible]
$x \cdot (\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$= x^{-1}$
$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	a^x	[illegible]
$\frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a\lvert x\rvert$	[illegible]
Beachte: Variable x in Bogenmass!		
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	[illegible]	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	[illegible]	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	[illegible]	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	[illegible]	$\frac{1}{x^2+1}$

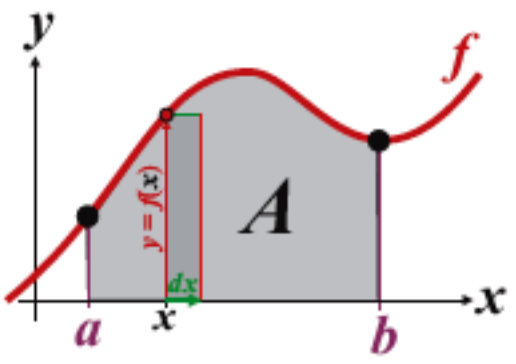
9 Integralrechnung

Definition: $F(x)$ heisst **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Zwei verschiedene Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich um höchstens eine additive Konstante: $F_2(x) = F_1(x) + C$. Die Konstante C heisst **Integrationskonstante**.

- **Unbestimmtes Integral = Menge aller Stammfunktionen:** $\boxed{\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}}$

- **Bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b}$$



A = Fläche unter f zwischen den Integrationsgrenzen $x = a$ und $x = b$, wenn f zwischen a und b keine Nullstellen hat.

Sample

9.1 Integrationsregeln

- **Konstantenregel:** $\int_a^b (\, c \cdot f(x)\,)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

- **Summenregel:** $\int_a^b (\, u(x) \pm v(x)\,)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx \pm \int_a^b v(x)\, dx$

- **Orientierung des Integrals:** $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

- **Änderung der Integrationsgrenzen:** $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

- **Partielle Integration:** $\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [\, u(x) \cdot v(x)\,]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$

- **Substitutionsregel:** Es sei $f(x) = u(\, v(x)\,)$ [illegible] kettete [illegible] $U(\, v\,)$ bezeichne eine Stammfunktion der äusseren Funktion [illegible] $\int_a^b u(v(x)) \cdot v'(x)\, dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(v)\, dv = [\, U(\, v\,)\,]_{v(a)}^{v(b)}$

9.2 Rotationsvolu[illegible] und L[illegible]enlänge

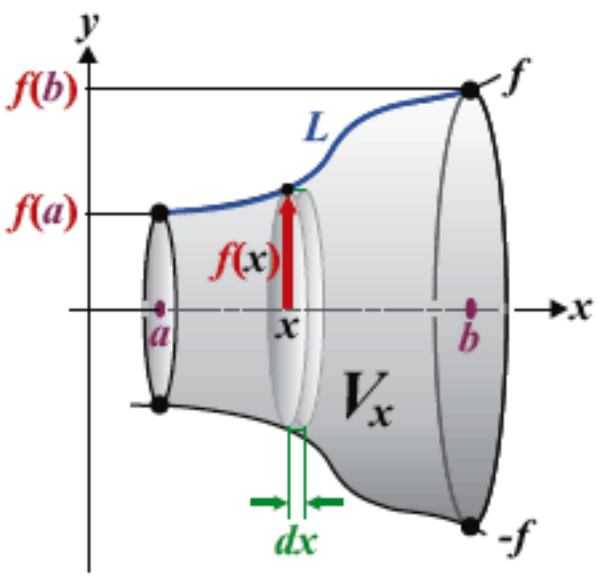
- **Drehung um x-[illegible]chse:** $V_x = \pi \int_a^b (\, f(x)\,)^2\, dx$

  [illegible]rallgemeinerung siel[illegible] S. 12.

  Dreh[illegible] um y-A[illegible]se: $V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} (\, \overline{f}(y)\,)^2\, dy$

  $y = f(x)$ streng m[illegible]oton.
  $x = \overline{f}(\,)$ ist d[illegible]mkehrfunktion von $y = f(x)$
  (vgl. S. [illegible])

- **Bogenlänge:** $L = \int_a^b \sqrt{1 + (\, f'(x)\,)^2}\, dx$



Sample

9.3 Potenzreihen, Taylor-Polynome

▶ **Taylorpolynom** $T_n(x)$ = Approximation einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 durch eine ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) n-ten Grades:

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k}$$, wobei $f^{(k)}(x)$ für die k-te Ableitung steht. Ausführlich:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n$$

Fehler (Restglied): $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \alpha(x-x_0)), \quad 0 < \alpha < 1$

▶ **Potenzreihenentwicklungen:**

Term	Potenzreihenentwicklung	[illegible]tig f[illegible]
$(1+x)^n$	$\underbrace{\binom{n}{0}}_{1} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots$	$n \in \mathbb{N}$, [illegible] < 1
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert$ [illegible] 1
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}$ [illegible] $\frac{5}{8} x^4 \pm$ [illegible]	[illegible] $\lvert x \rvert < 1$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!}$ [illegible] $^4 + \ldots$	[illegible] $\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$(x-1) - \frac{1}{2}(x$ [illegible] $^2 + \frac{1}{3}(x -$ [illegible] $^3 \mp \ldots$	$0 < x \leq 2$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{3!} x^3$ [illegible] $\frac{1}{5} x^5 -$ [illegible] $^7 \pm \ldots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$1 -$ [illegible] $x^2 +$ [illegible] $\frac{1}{6!} x^6 \pm$ [illegible]	$x \in \mathbb{R}$
[illegible]	$x + \frac{1}{3} x^3$ [illegible] $\frac{2}{15} x^5$ [illegible] $315 x^7 + \ldots$	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
$\arcsin(x)$	[illegible] $\frac{1}{2 \cdot 3}$ [illegible] $\frac{3}{4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \ldots$	$\lvert x \rvert \leq 1$
[illegible](x)	$x -$ [illegible] $^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 \pm \ldots$	$\lvert x \rvert \leq 1$

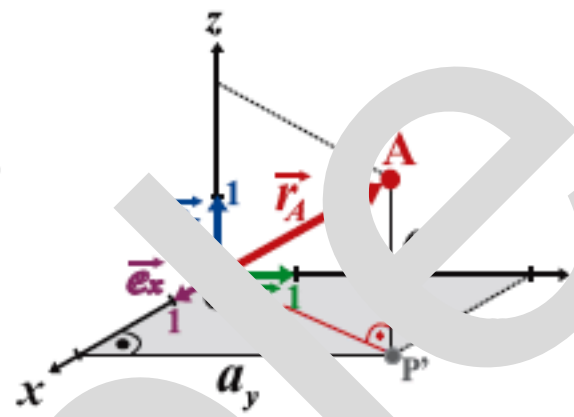
Sample

10 Vektorgeometrie

Definition: Ein Vektor $\vec{r}_A$ beschreibt eine **Translation (Verschiebung)**. Vektoren haben eine Länge (Betrag) und eine Orientierung (Richtung). Vektoren dürfen beliebig parallel verschoben werden, haben also keinen fix vorgegebenen Anfangspunkt.

▶ **Einheitsvektoren:**

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



▶ **Linearkombination:** Jeder Dreidimensionale Vektor $\vec{r}_A$ lässt sich als Linearkombination von $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ schreiben: $\vec{r}_A = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z$.

a_x, a_y, a_z heissen Komponenten von $\vec{r}_A$.

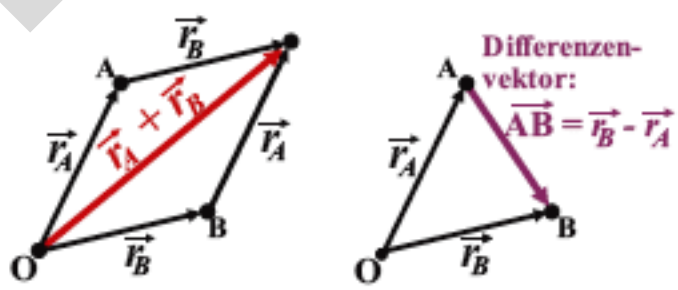
▶ **Ortsvektor** von A(a_x, a_y, a_z): $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$ Vektor vom Ursprung zum Punkt A.

▶ **Betrag, Länge:** $\boxed{|\vec{r}_A| = r_A = \overline{OA} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

▶ **Addition, Subtraktion:**

$$\boxed{\vec{r}_A \pm \vec{r}_B = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_x \pm b_x\\a_y \pm b_y\\a_z \pm b_z\end{pmatrix}}$$

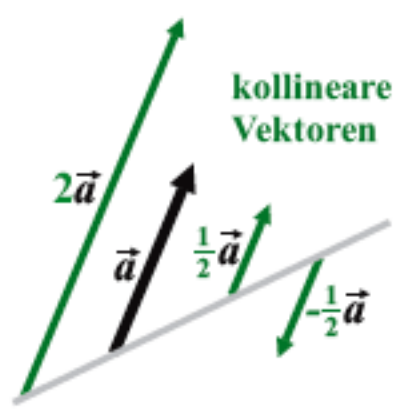
Differenzenvektor = Ortsvektor des Endpunktes Minus Ortsvektor des Anfangspunktes.



▶ **Multiplikation mit Skalaren (= Zahlen)**

Kollineare Vektoren $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$:

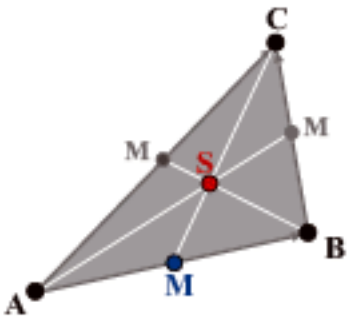
$$\boxed{\vec{b} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k \cdot a_x\\k \cdot a_y\\k \cdot a_z\end{pmatrix}}$$



Komplanare Vektoren: $\vec{c}$ ist komplanar zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wenn $\vec{c}$ eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, also wenn es $t,\ s\ \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\boxed{\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}}$ gilt.

Sample

▶ **Mittelpunkt von A und B:** $\boxed{\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right)}$

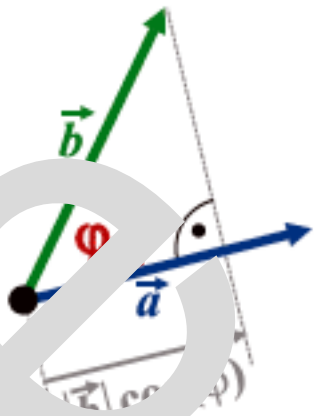


▶ **Schwerpunkt** Δ**ABC:** $\boxed{\vec{r}_S = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right)}$

(siehe auch S. 7)

▶ **Skalarprodukt:** (Senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$)

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)}$$

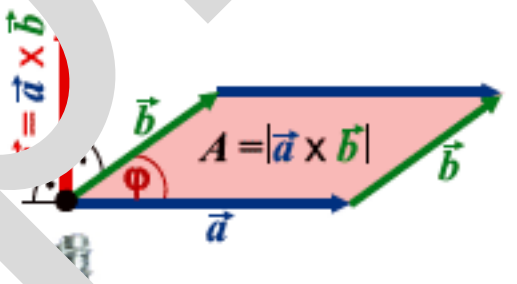


▶ **Winkel** φ **zwischen** $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$: $\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$

▶ **Senkrechtbedingung:** $\boxed{\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$ falls $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

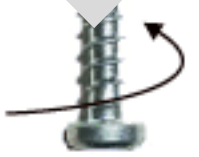
▶ **Vektorprodukt:**

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y\,b_z - a_z\,b_y \\ a_z\,b_x - a_x\,b_z \\ a_x\,[illegible] \end{pmatrix}}$$



$\boxed{\vec{c}\perp\vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{c}\perp\vec{b}}$

$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)}$

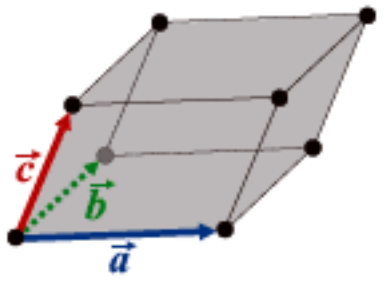


$|\vec{c}|$ = Fläche des von $\vec{a}$ und [illegible]fgespannten Parallelo[illegible]

▶ **Spatprodukt**

$\boxed{V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = |(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}| = |(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|}$

V = [illegible] des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates.



⇒ Geraden [illegible]e S. 14.

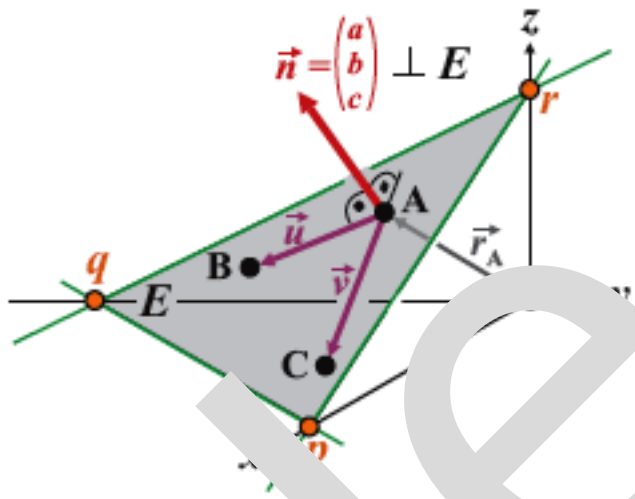
Sample

10.1 Ebenen

▶ **Parameterform:** $E: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

- Falls **3 Punkte** A, B, C oder **Punkt** A und **zwei verschiedene Richtungen** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ gegeben sind.
- Jedem Zahlenpaar (t, s) entspricht genau ein Punkt P (Ortsvektor $\vec{r}$) auf E.
- **Normalenvektor:**

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{u} \times \vec{v} \perp E \quad \text{(vgl. S. 28)}$$



▶ **Koordinatenform:** $E: \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0$ oder E [illegible] $+ c\,z$ [illegible] $= 0$

- **Hessesche Normalform:** $H(x, y, z)$: $\frac{ax + by +}{\sqrt{a^2 + b^2 +}}$ [illegible] $= 0$
- **Abstand P(u / v / w) zu E:** $d(\mathrm{P},$ [illegible] $\frac{au + bv}{\sqrt{a^2 + b}}$ [illegible]

▶ **Achsenabschnittsform:** $E: \frac{x}{p} +$ [illegible] $+$ [illegible] 1 $\quad p,$ [illegible] $\neq 0$

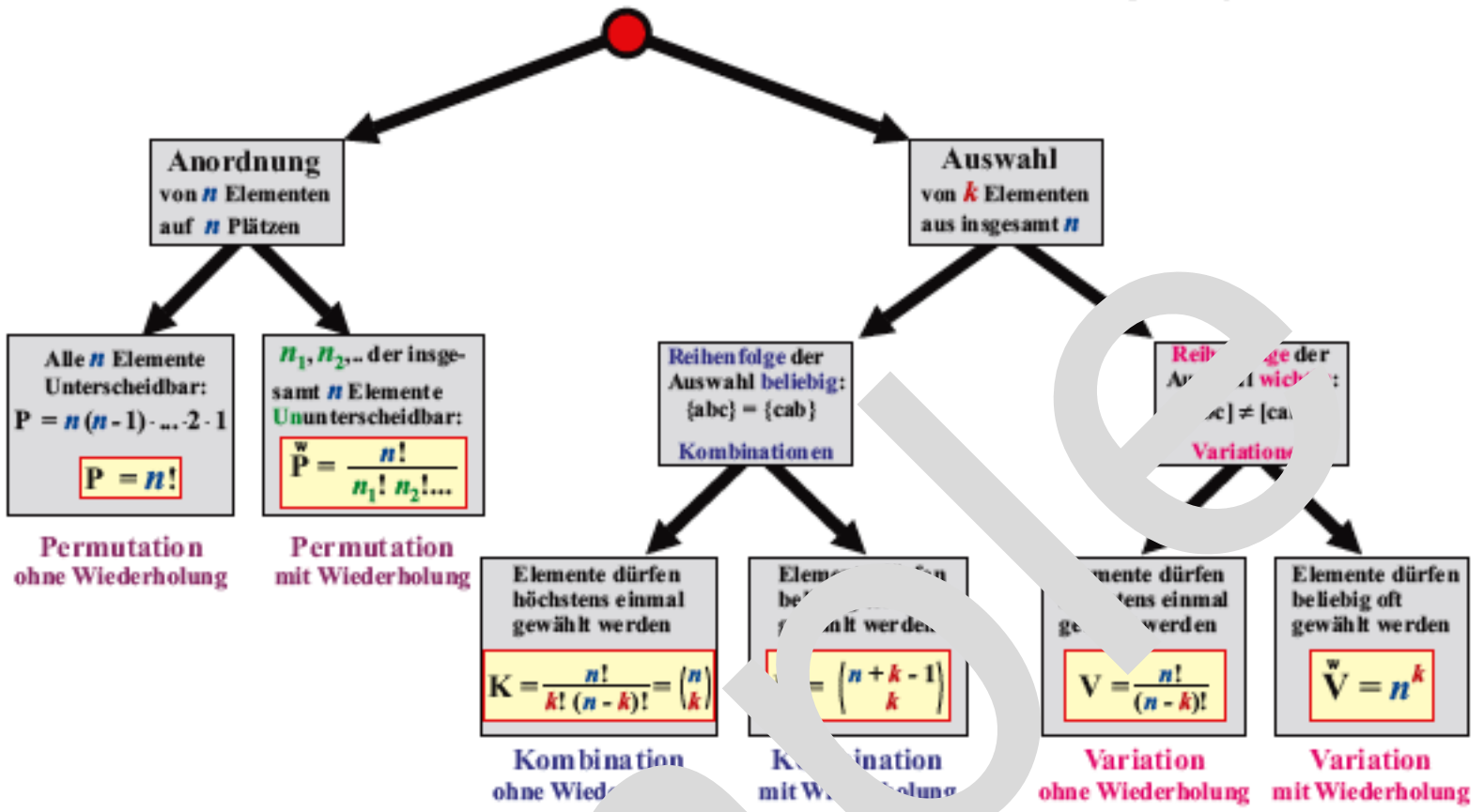
Ebene E parallel zur x-Achse: $E:$ [illegible] $= 1$ und zyklisch $z \to y \to x$

Sample

11 Stochastik

11.1 Kombinatorik

Start: Kriterien, welche für **eine** Stichprobe gelten.



Fakultät: $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot n$

Binomialkoeffizient: $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$

Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

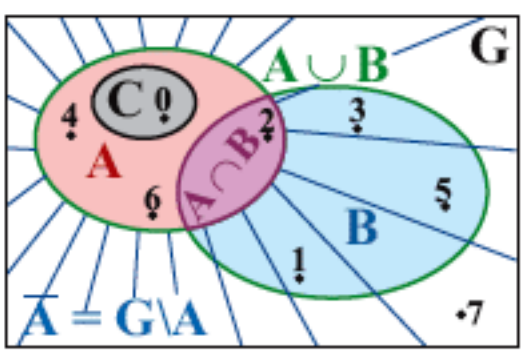
Rekursion: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

11.2 Wahrscheinlichkeit, Mengenlehre

- **G = Grundmenge = Menge aller möglichen Ergebnisse** (= Ergebnisraum).
- **A, B, C = Ereignisse** = Teilmengen von **G**

  Beispiel: $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $2 \in A$; $3 \notin A$

  $|A|$ = **Mächtigkeit** = Anzahl Elemente von **A**.
- $A \cap B$ = **Schnittmenge = A und B.**
- $A \cup B$ = **Vereinigungsmenge = A oder B.**
- $\overline{A} = G \backslash A = \left\{ \begin{array}{l} \text{Gegenereignis oder} \\ \text{Komplement zu A} \end{array} \right\}$ = **G ohne A.**
- $C \subseteq A$ = **Teilmenge = C enthalten in A.**
- $\{\} = \emptyset$ = **Leere Menge.**

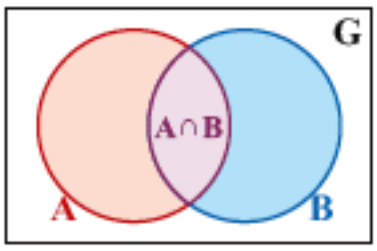


Laplace-Wahrscheinlichkeit: Alle Elemente in G treten gleichwahrscheinlich auf. Dann gilt:

$$\boxed{p(A) = \frac{|A|}{|G|} = \frac{\text{Anzahl Elemente in A}}{\text{Anzahl Elemente in G}} = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}}}$$

Sample

- $\left\{\begin{array}{ll}\textbf{Unmögliches Ereignis} & p(\emptyset)=0\\ \textbf{Sicheres Ereignis} & p(\mathrm{G})=1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0 \le p(\mathrm{A}) \le 1}$



- **Gegenwahrscheinlichkeit** $\boxed{p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})}$
- **Addititionssatz** $\boxed{p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}$
- **Bedingte Wahrscheinlichkeit** $p(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{A})$ = Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist: „A = Wenn, B = Dann" (Verkleinerung der Grundmenge von G auf A): $\boxed{p(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|}{|\mathrm{A}|} = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}}$
- **Multiplikationssatz** $\boxed{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{A})}$
- A und B sind **unabhängig**, falls $\boxed{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{B})}$ gi
- **Binomialverteilung (Bernoulli)** siehe S. 32.

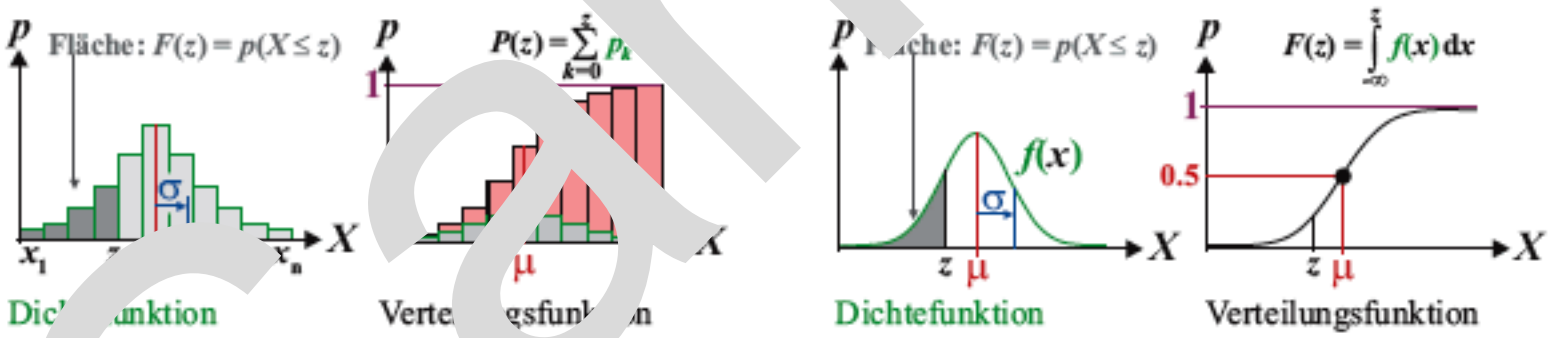
11.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Verteilung:

Zufallsvariable X nimmt ausschliesslich die n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten (=relativen Häufigk Gewichtungsfaktoren) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a

Kontinu iche Ver lung:

Zu variai nimmt beliebige Werte $x \in$ an. D Wahrscheinlichkeit, dass genau x itt, he Dichtefunktion $f(x)$.



Dic unktion | Verte gsfun n | Dichtefunktion | Verteilungsfunktion

$p_1 + \ldots + p_n = \sum_k p_k = 1$	**Normierung**	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k$	**Mittelwert (Erwartungswert)**	$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x\,dx$
$\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - \mu)^2$	**Varianz**	$\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x-\mu)^2\,dx$
$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	**Standard-abweichung**	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Seien X, Y zwei Zufallsvariablen und a, b Konstanten. Dann gilt:

$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$ $\qquad$ $\mathrm{var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \mathrm{var}(X)$

Sample

11.4 Binomialverteilung, Bernoulli (diskrete Verteilung)

Stichprobenraum besteht aus genau zwei Elementen: $S = \{A, \overline{A}\}$ mit den gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten $p(A) = p$ und $p(\overline{A}) = 1 - p$. Bei genau n Wiederholungen trete Ereignis A X mal ein. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass...

- A **mindestens einmal** eintritt: $\boxed{P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n}$
- A **genau** k **mal** eintritt: $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$ $\quad 0 \leq k \leq n$
- A **höchstens** x **mal** eintritt: $\boxed{P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$ $\quad 0 \leq x \leq n$
- **Erwartungswert:** $\boxed{E(X) = n\,p}$ **Standardabweichung:** $\boxed{\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}}$
- Für $n\,p\,(1-p) > 9$ kann eine Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden.

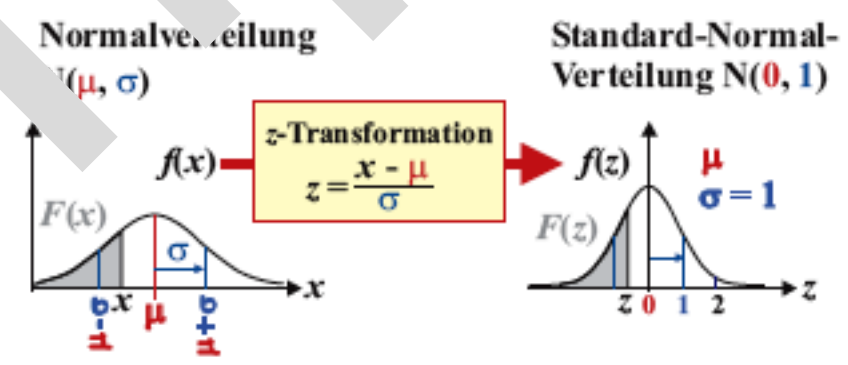
11.5 Normalverteilung (kontinuierliche Verteilung)

- **Dichtefunktion:**

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = N(\mu, \sigma)}$$

Standard-Normalverteilung:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = N(0, 1)}$$



Symmetrie:

$f(\mu + x) = f(\mu - x)$ $\qquad f(-z) = f(+z)$

$F(-z) = 1 - F(+z)$

- **Verteilungsfunktion:**

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt}$$

Standardnormalverteilung:

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}$$ (⇒ Tabelle im inneren hinteren Umschlag)

- σ-Umgebungen bei Normalverteilung:

$1\,\sigma$-Umgebung	$2\,\sigma$-Umgebung	$3\,\sigma$-Umgebung
$p(\lvert \mu - x \rvert < 1\,\sigma) \approx 68.3\%$	$p(\lvert \mu - x \rvert < 2\,\sigma) \approx 95.4\%$	$p(\lvert \mu - x \rvert < 3\,\sigma) \approx 99.7\%$

Sample

11.6 Statistik: Daten mit einer Variablen

Seien $X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k\}$ die Werte einer Stichprobe und $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ deren **absolute Häufigkeiten**. Für den Umfang der Stichprobe gilt $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Die **relative Häufigkeit** ist durch $p(x_i) = \frac{n_i}{n}$ definiert. Insbesondere gilt $\sum_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$.

	Einzeldaten	**Gruppendaten (Klassen)**
Daten	n Werte $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$	k Werte $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ der abs. Häufigkeit $n_1,\ n_2,\ \ldots,$ [illegible]
Arithmetischer Mittelwert	$\overline{x} = E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\overline{x} = E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}$ [illegible] $x_i = \sum_{i=1}$ [illegible] x_i
Median	Der Median $x_{0.5}$ der Werte einer geordneten Stichp[illegible] ist... • der in der Mitte liegende Wert, falls [illegible] ung[illegible] • Der Mittelwert beider mittleren [illegible]te, falls n [illegible]de.	
Modalwert (Modus)	Der Modalwert x_M ist der am häufig[illegible] auftreten[illegible] Messwert.	
Spannweite	$= x_{ma}$ [illegible] x_{min}	
Varianz*	$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i$ [illegible] $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}$ [illegible] $(x_i -$ [illegible] oder $s_x^2 = \sum_{i=1}^{k} p$ [illegible] $(x_i - \overline{x})^2 =$ [illegible] $E(X^2) - (E(X))^2$	

[*] Wenn die Werte $x_1,$ [illegible] $\ldots,\ x$ [illegible] Popula[illegible]n darstellen oder wenn die Variation innerhalb der Stichprobe gesucht [illegible], ers[illegible] ma[illegible]n Nenner $n-1$ durch n.

Stand[illegible]abw[illegible]ichung: $s_{[illegible]} = \sqrt{s_x^2}$

Un[illegible]tichprob[illegible]chen, dient der **Variationskoeffizient** $V = \frac{s_x}{\overline{x}} \cdot 100\%$

Box p[illegible] Ermittle den [illegible]edian $x_{0.5}$, das obere ($x_{0.75}$) und das untere ($x_{0.25}$) Quartil, die kleinste [illegible]min) und die grösste (x_{max}) Stichprobe. Dann

Ungleichung von Tschebyschev:

Für eine Stichprobe mit Mittelwert $\overline{x}$ und Varianz s_x^2 gilt für die Wahrscheinlichkeit p dass ein Messwert x innerhalb einer $\pm\lambda$-Umgebung um den Mittelwert liegt: $p(|x - \overline{x}| < \lambda) \geq 1 - \frac{s_x^2}{\lambda^2}$

Sample

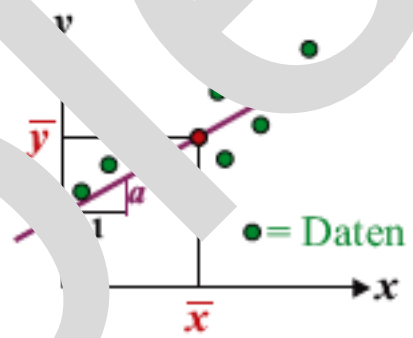
11.7 Daten mit zwei Variablen: Regression und Korrelation

Seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots (x_n, y_n)$ n Paare von Messwerten. Die Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen X und Y kann durch eine von Parametern a, b,... abhängigen Modellfunktion $y = f(x)$ beschrieben werden. Die Parameter a, b,... von f werden so gewählt, dass das mittlere Quadrat der Abweichungen von $y_i - f(x_i)$ minimal wird:

$$\boxed{F(X) = \sum_{i=1}^{n} (\, y_i - f(x_i)\,)^2 \quad \longrightarrow \quad \text{minimal}}$$

Lineare Regression:

Modellfunktion: $\boxed{y = f(x) = a \cdot x + b}$ mit



- **Steigung:** $\boxed{a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \dfrac{c_{xy}}{s_x^2} = r_x \; \dfrac{\;}{s_x}}$
- $y-$**Achsenabschnitt:** $\boxed{b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}}$

Korrelationskoeffizient:

$$\boxed{r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \;}} = = \frac{c_{xy}}{s_x \cdot s_y}}$$

Kova z:

$$\boxed{\begin{aligned} c_{xy} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y}) \\ c_{xy} &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}}$$

Alternative: G chungs zur B echnung von a und b der Regressionsgeraden:

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \cdot a \;+\; (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot b \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot a \;+\; n \;\cdot\; b \;=\; \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array} \right|}$$

Sample

Index

Ähnlichkeit, 6
Äquivalenzumformungen, 3

Ableitung, 23, 24
Ableitungsregeln, 23
Absolute Häufigkeit, 33
Abstand, 29
Achsenabschnittsform (g, E), 14, 29
Additionstheoreme trig. Funktionen, 18
Algebra, 3, 4
Arithmetische Folgen und Reihen, 20
Assoziativgesetz, 3
Asymptote, 15
Ausmultiplizieren, 3

Basis, 5, 16
Basiswechsel, 5
Bedingte Wahrscheinlichkeit, 31
Bestimmtes Integral, 24
Betrag, 2, 14, 27
Binomialkoeffizient, 30
Binomialkoeffizienten, 4, 30
Binomialverteilung, 32
Binomische Formeln, -Satz, 4
Binomischer Satz, 4
Bogenlänge, 9, 25
Bogenmass, 17
Box-Plot, 33
Bruchrechnen, 4

Cavalieri, Prinzip von, 10
Cosinusfunktion, 17
Cosinussatz, 6

Definitionsbereich, 13
Dichtefunktion, 31, 32
Differentialrechnung, 23
Diskriminante, 19
Distributivgesetz, 3
Divergenz, 21
Dodekaeder, 11
Doppelbrüche, 4
Drachenviereck, 8
Dreiecke, 6

Einheitskrei
Einheits
Ellipse
Erge aum, 30
Erst leitung, 23
Erw ngswert, 3
Euk tz
Eulers , 2
Eulersche Zahl, 16
Explizite Darstellung, 20
Exponent, 5
Exponentialfunk
Extrema, 23

Faktorisieren, 3
Fakultät, 30
Fläche unter Funktionen, 24
Flächeninhalt, 6
Folgen und Reihen, 20
Funktion, 13

Ganze Zahlen, 2
Ganzrationale Funktionen, 13
Gaussche Zahlenebene, 2
Gebrochen-rationale Funktionen, 15
Gegenwahrscheinlichkeit, 31
Geometrische Folgen und Reihen, 20
Geraden, 14
Gleichschenklige, gleichseitige Dreiecke, 7
Gleichungen, 3, 19
Goldener Schnitt, 22
Grenzwerte, 21

Höhe, 6, 7, 10
Höhensatz, 6
Harmonische Reihe, 20
Harmonische Teilung, 22
Hauptsatz Diff / Int, 24
Hessesche Normalform, 29
Hochpunkt, 23
Hyperbelfunktionen, 15

Ikosaeder, 11
Imaginäre Einheit, 2
Inkreisradius, 7, 8
Inkugelradius, 12
Integralrechnung, 24
Integrationsregeln, 25
Irrationale Zahlen, 2

Kathetensatz,
Kegel, 10
Kehrwert
Kettenreg
Klammerreg
Klasse (Statisti
e, kompl Vektor 7
omb ik, 30
Kommu setz, 3
Komplanar toren, 27
Komplement,
Komplexe Zahl njugierte,
stantenregel, 23, 25
gen, 21
Ko tenform (g, E), 29
Korre , Kovarianz, 34
Kreis: Teile und Gleichung, 9
Kreiswinkelsätze, 9
Kugel: Teile und Gleichung, 11

Länge (Vektor), 27
Laplace-Wahrscheinlichkeit, 30
Leere Menge, 30
Lineare Funktionen, 14
Lineare Regression, 34
Linearkombination, 27
Logarithmen, 5
Logarithmusfunktionen, 16

Mantelfläche, 10
Median, 33
Mengenlehre, 30
Mittelpunkt, 9, 11, 28
Mittelsenkrechte (Dreieck), 7
Mittelwert, 33
Mittelwerte, 22
Modus, Modalwert, 33

Natürliche Zahlen, 2
Nennergrad, 15
Newtonsches Nullstellenverfahren, 19
Normalenvektor, 28, 29
Normalform (g, E), 14, 29
Normalverteilung, 32
Nullstelle, 19

Oberfläche, 10
Octaeder, 11
Ortsvektor, 27

Sample

Parabel, 15
Parabeln, 13
Paraboloid, 12
Parallel (g, E), 14
Parallelogramm, 8, 28
Parameterform (Geraden, Ebenen), 14, 29
Partielle Integration, 25
Pascalsches Zahlendreieck, 4
Periode, 17
Permutation, 30
Platonische Körper, 11
Polare (an Kreis), 9
Polgeraden, 15
Polyeder, 11
Polynomdivision, 15, 19
Polynomfunktion, 13
Potenzfunktionen, 15
Potenzieren, 2, 3
Potenzreihen, 26
Potenzsätze, 5
Prisma, 10
Produktregel, 23
Punktsymmetrie, 18
Pyramiden, 10
Pythagoras, Satz von, 6

Quader, 10
Quadrat, 8
Quadratische Gleichungen, 19
Quadratwurzel, 5
Quotientenregel, 23

Radius, 9, 11
Radizieren, 2, 3
Rationale Zahlen, 2
Raute, 8
Rechteck, 8
Rechtwinklige Dreiecke, 6
Reelle Zahlen, 2
Regel von de l'Hôpital, 21
Regression, 34
Rekursive Darstellung, 20
Relative Häufigkeit, 33
Richtungsvektor (g, E), 14
Richtungsvektor (Geraden, [illegible] 14, 29
Rotation (Vektor), 5
Rotationsvolumen, 12, [illegible]

Sattelpunkt, 23
Sc[illegible]kt, 15
[illegible], 11
[illegible]nittmenge, 30
Schnittwinkel (g, E), 14
Schwerpunkt [illegible]
Schwerpu[illegible] 28
Segm[illegible]
[illegible]nd Sekantensa[illegible]
[illegible]entangentenwinkel
Sehnenviereck, 8
Seitenhalbierende ([illegible]k), 7
Sekant[illegible]
Sektor, [illegible]
Senkrecht, 28
Senkrecht (g, E), 14
Sinusfunktion, 17
Sinussatz, 6
Skalar, 27
Skalarprodukt, 28
Spannweite, 33
Spatprodukt, 28
Spiegelsymmetrie, 18
Spitze Körper, 10
Spurpunkte, 14
Stammfunktion, 24
Standardabweichung, 31–33
Statistik, 33
Steigung, 14, 34
Stichprobenraum, 30
Strahlensätze, 6
Substitutionsregel (int), 25
Summenregel, 23, 25
Symmetrie, 18

Tangensfunktion, 17
Tangente (Kreis, Kegelschnitt), 9
Tangentensteigung (Funktion), 23
Tangentenviereck, 8
Tangentialebene an Kugel, 11
Taylor-Polynome, 26
Teilmenge, 30
Termumformungen, 4
Terrassenpunkt, 23
Tetraeder, 11
Thaleskreis, 9
Tiefpunkt, 23
Torus, 12
Translation [illegible]
Trapez, 8
Trigonometrisc[illegible]ktionen, [illegible]
Trigonomtrische [illegible]onen, 1[illegible]
Tschebyschev, Ungle[illegible], 33

Umkehrf[illegible] 13
Umkr[illegible]
Umk[illegible]iradius, 1[illegible]
Unb[illegible]immtes Integ[illegible]4
[illegible]liche geometrisc[illegible]eihe, 20
U[illegible]hung, 3

Varian[illegible] 33
Variation, [illegible]
[illegible]riationsk[illegible]ut, 33
[illegible]rgeometr[illegible]
Ve[illegible]rodukt, 2[illegible]
Vere[illegible]gsmenge, [illegible]
Verteil[illegible]en, 31
Verteilungsfunktion, 31, 32
Vertikale Asymptoten, 15
Vierecke, 8
Vieta, Satz von, 19
Vollständige Induktion, 22
Volumen, 10, 12

Würfel, 10, 11
Wahrscheinlichkeit, 30
Wendepunkt, 23
Wertebereich, 13
Winkel (g, E), 14
Winkel (Vektoren), 28
Winkelhalbierende (Dreieck), 7
Wurzel, 5
Wurzelfunktionen, 15

z-Transformation, 32
Zählergrad, 15
Zahlenfolge, 20
Zentriwinkel (Kreis), 9
Zone (Kugel), 11
Zufallsvariable, 31

Zylinder, 10

Sample