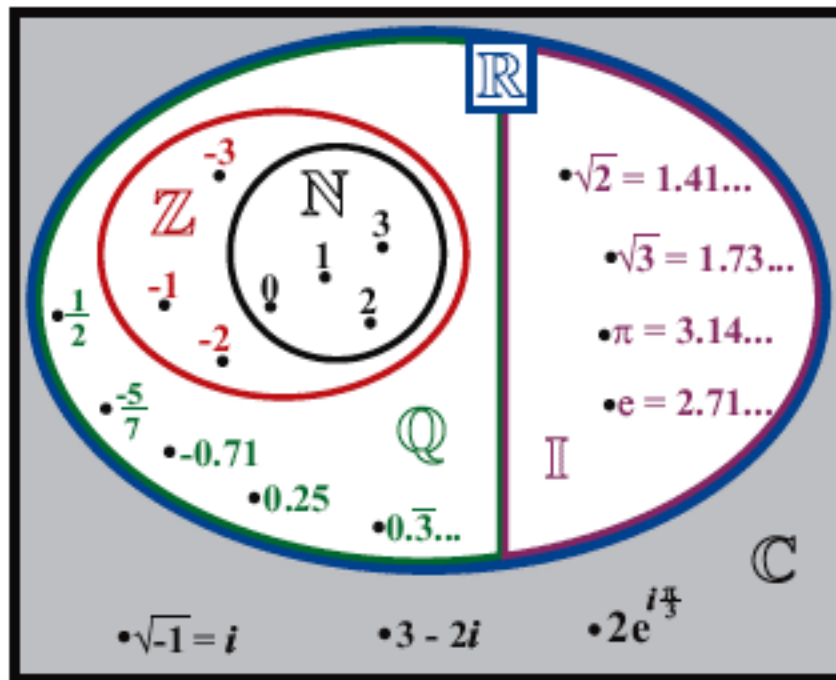


Formulaire mathématique

1. Nombres	Nombres naturels, entiers, rationnels, réels, complexes	2
2. Algèbre	Lois de calcul, transformations	3
	Identités remarquables, binôme de Newton, fractions	4
	Puissances, racines, logarithmes	5
3. Géométrie classique plane	Triangles, triangles rectangles	6
	Triangle isocèle /équilatéral, lignes dans un triangle	7
	Quadrilatères	8
	Cercle, parties et équation	9
	Coniques (ellipse, hyperbole, parabole)	10
4. Géométrie classique dans l'espace	Principe de Cavalieri, prismes et pyramides	11
	Sphère, polyèdres, solides platoniques	12
	Solides limités par des surfaces courbes	13
5. Fonctions	Domaine, fonction réciproque, translation, rotation	14
	Parité, fonction valeur absolue, fonctions polynomiales	15
	Fonctions affines (droites), paraboles	16
	fonctions x^n , fonctions rationnelles	17
	Fonctions exponentielles, logarithmes	18
	Fonctions trigonométriques	19
6. Equations	Equations polynomiales, algorithme de Newton	21
7. Matrices	Systèmes d'équations linéaires	22
8. Suites et séries	Suites et séries arithmétiques, géométriques	24
	Limites, règle de l'Hôpital	25
	Moyennes, section d'or, induction mathématique	26
9. Math. financières	Interêts composés, rentes, élasticité	27
10. Calcul différentiel	Pente, dérivée 1 ^{ère} , règles de dérivation	28
	Table des dérivées et primitives	29
11. Calcul intégral	Intégrale définie, indéfinie, règles d'intégration	30
	Solides de révolution, longueur d'une courbe	31
	Séries de puissances, formule de Taylor	31
12. Géométrie vectorielle	Opérations élémentaires	32
	Produit scalaire, vectoriel et mixte	33
	Droites: éq. cartésienne, éq. paramétrique	34
	Plans: vecteur normal, éq. cartésienne, éq. paramétrique	35
13. Probabilités et analyse combinatoire	Analyse combinatoire, probabilités, ensembles	36
	Lois des probabilités	37
	Distribution binomiale, distribution normale	38
	Statistique à une variable: moyenne, variance,...	39
	Statistique à deux variables: régression, corrélation	40
14. Symboles	Symboles mathématiques, alphabet grec	41

1 Ensembles de nombres



- Nombres naturels: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **Nombres entiers**: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- **Nombres rationnels**: ensemble des fractions: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$: Nombres avec un développement décimal périodique ou fini.
- **Nombres irrationnels** $\mathbb{I}$: nombres avec un développement décimal infini et non-périodique.
- **Nombres réels** $\mathbb{R}$: Union des nombres rationnels et irrationnels.
- Nombres complexes:
 $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ où $i^2 = -1$.

Nombres complexes

► Le nombre i tel que $i^2 = -1$

► Formule d'Euler:

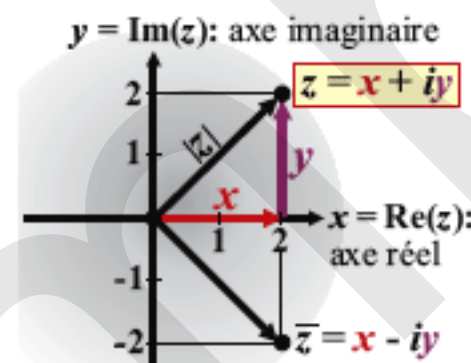
$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$e^{i\varphi} = \text{cis}(\varphi), \quad |e^{i\varphi}| = 1$$

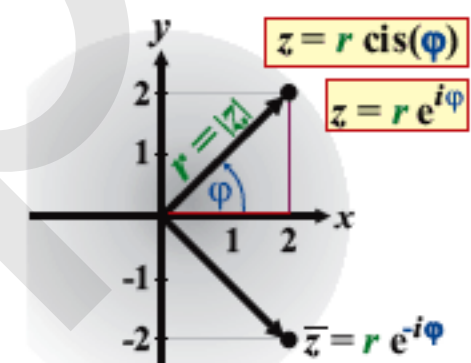
► plan de Gauss:

Plan xy des nombres complexes.

forme algébrique



forme trigonométrique



Nombre complexe	z	$z = x + iy$ $\begin{cases} x : \text{partie réelle} \\ y : \text{partie imaginaire} \end{cases}$	$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \text{cis}(\varphi)$
Conjugué	$\bar{z}$	$\bar{z} = x - iy$	$\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$
Module	$ z $	$ z = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$	$ z = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Argument	φ	$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$	$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ $\varphi = \arg(z), \quad k \in \mathbb{Z}$
Addition Soustraction	$z_1 + z_2$ $z_1 - z_2$	$(x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$	
Multiplication	$z_1 \cdot z_2$	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$	$r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division ($z_2 \neq 0$)	$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{z_1 \bar{z}_2}{ z_2 ^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$	$\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Inverse ($z \neq 0$)	$\frac{1}{z}$	$\frac{\bar{z}}{ z ^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$	$\frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$
Puissance n-ème	z^n	$r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = r^n \cdot e^{in\varphi}$	
Racines n-èmes		$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$	

2 Algèbre

2.1 Lois de calculs basiques

	Addition	Multiplication
Commutativité:	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativité:	$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
Élément neutre:	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Élément inverse:	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$a \cdot (a^{-1}) = (a^{-1}) \cdot a = 1$
Distributivité:	$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$	

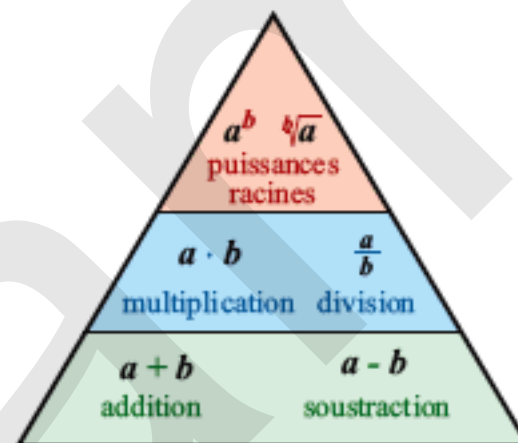


2.2 Priorité des opérations

Puissances, racines avant la multiplication, division avant l'addition, soustraction

Parenthèses facultatives:

- $-1^2 = -(1)^2 = -1$
- $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot (3^4) = 162$
- $4/2+3 = (4/2)+3 = 5$
- $2+3 \cdot 4 = 2+(3 \cdot 4) = 14$



Parenthèses obligatoires:

- $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$
- $(2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296$
- $4/(2+3) = 4/5 = 0.8$
- $(2+3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$

2.3 Equations équivalentes

Equation $a = b$		Inéquation $a < b$
$a \pm c = b \pm c$	Addition / soustraction	$a \pm c < b \pm c$
$a \cdot c = b \cdot c$ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$	Multiplication avec $c \neq 0$ Division par $c \neq 0$	$\left\{ \begin{array}{ll} a \cdot c < b \cdot c & \text{si } c > 0 \\ a \cdot c > b \cdot c & \text{si } c < 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} & \text{si } c > 0 \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} & \text{si } c < 0 \end{array} \right.$
$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	Inverse ($a, b \neq 0$)	$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} & \text{si } a \cdot b < 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} & \text{si } a \cdot b > 0 \end{array} \right.$

2.4 Transformations, binôme de Newton

Identités remarquables (les formules du binôme):

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $a^2 + b^2$ pas de factorisation sur $\mathbb{R}$.
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

Binôme de Newton:

$$(a + b)^n = 1 a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + 1 a^0 b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Coefficients binomiaux: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Factorielle: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1! = 1$.

Pour $(a - b)^n$ le signe des termes est *alternant*: $(a - b)^3 = +1 a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - 1 b^3$.

Binôme de Newton et le triangle de Pascal:

	$n = 0$	$\binom{0}{0}$	$(a + b)^0 = 1$
	$n = 1$	$\binom{1}{0}, \binom{1}{1}$	$(a + b)^1 = 1a^1 + 1b^1$
	$n = 2$	$\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}$	$(a + b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
	$n = 3$	$\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$	$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
	$n = 4$	$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$	$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$

2.5 Opérations sur les fractions

Addition, Soustraction	$\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{ay}{by} \pm \frac{xb}{yb} = \frac{ay \pm xb}{by}$	► Mise au dénominateur commun: PPMC. ► Additionner les numérateurs.
Multiplication	$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y}$	► Multiplier les numérateurs et les dénominateurs.
Division, doubles fractions	$\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}$	► Division par une fraction = multiplication par son inverse.

Note: Toute division par zéro est interdite: $b, y, (x) \neq 0$ pour les opérations ci-dessus.

2.6 Puissances et racines

Définition: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$ est la puissance n -ème de a . $\begin{cases} a \in \mathbb{R} : \text{base} \\ n \in \mathbb{N} : \text{exposant} \end{cases}$

En particulier: $a^1 = a$ et $\begin{cases} a^0 = 1, & \text{si } a \neq 0. \\ 0^n = 0, & \text{si } n > 0 \end{cases}$

• Exposants négatifs $\Rightarrow$ dénominateurs: $k \cdot a^{-n} = \frac{k}{a^n}$ $a \neq 0$

• Exposants rationnels $\Rightarrow$ racines: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a \geq 0, n > 0$

En particulier: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ racine carrée: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Règles de calcul:

Bases égales	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $a \neq 0$
Exposants égaux	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $b \neq 0$
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $b \neq 0$
Puissances de puissances	$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ $a \geq 0$

2.7 Logarithmes (voir p. 18)

Définition: $\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$ $a, x > 0, a \neq 1$.

Multiplication, division	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
Puissances	$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$	$x > 0$
Changement de base	$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ $a > 0; a \neq 1$ $b > 0; b \neq 1$	utile: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

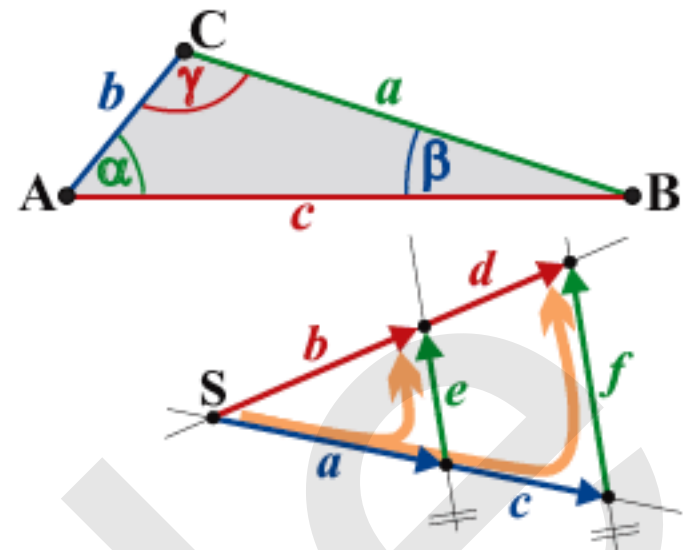
3 Géométrie classique plane

3.1 Triangles quelconques

- Somme des angles: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- Inégalité triangulaire: $c < a + b$
- Similitude: Deux triangles sont semblables s'ils ont des angles égaux ou/et si les rapports des côtes correspondants sont égaux.

Théorèmes de Thalès:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{e} = \frac{a+c}{f}$$



- Théorème du sinus: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$ où R : rayon du cercle circonscrit.
- Théorème du cosinus: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$ permutations cycliques: $\begin{matrix} b & a \\ c & b \end{matrix}$
- Aire: $A_\Delta = \frac{1}{2} (\text{base} \cdot \text{hauteur}) = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$
 - deux côtés et leur angle: $A_\Delta = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)$ permutations cycliques: $\begin{matrix} b & a \\ c & b \end{matrix}$
 - trois côtés (Héron): $A_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
 - trois angles et rayon R (cercle circonscrit): $A_\Delta = 2R^2 \cdot \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)$

3.2 Triangles rectangles

- Théorème de Pythagore:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

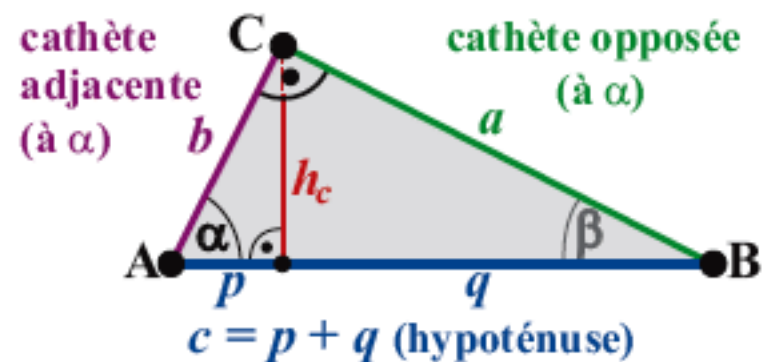
- Théorème de la hauteur: $h_c^2 = p \cdot q$

- Théorème d'Euclide:

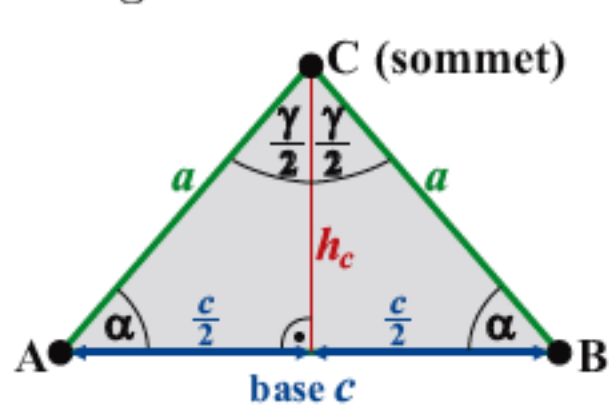
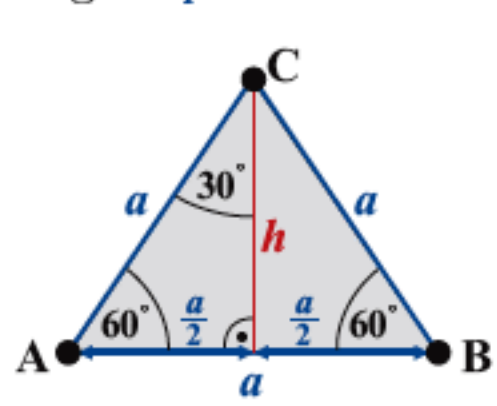
$$a^2 = c \cdot q \quad \text{ou} \quad b^2 = c \cdot p$$

- Fonctions trigonométriques:

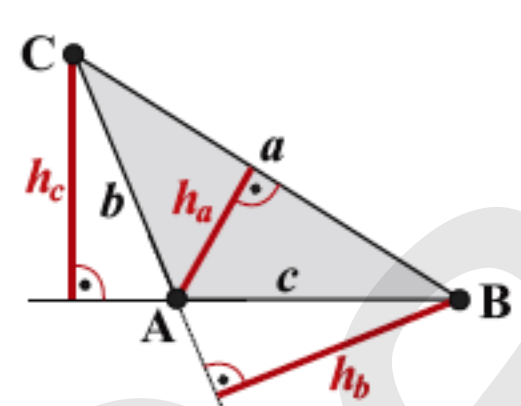
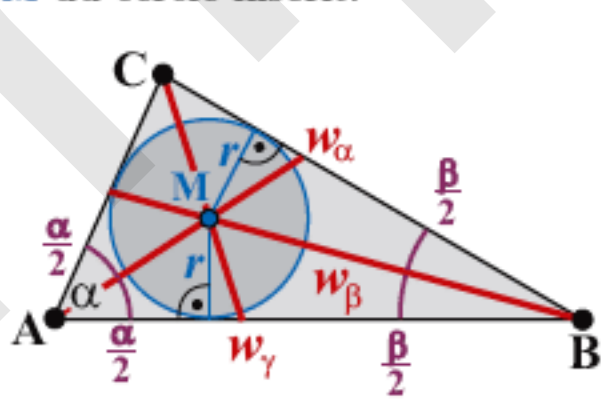
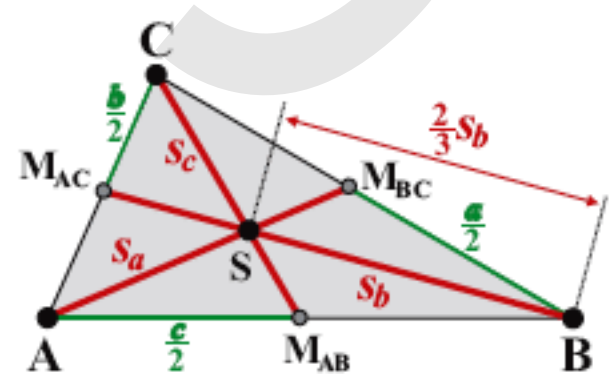
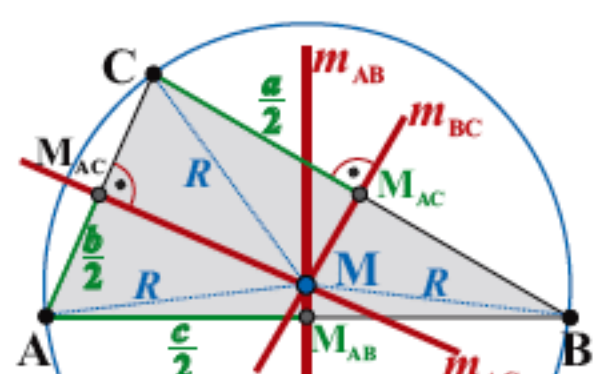
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad (\text{voir p. 19})$$



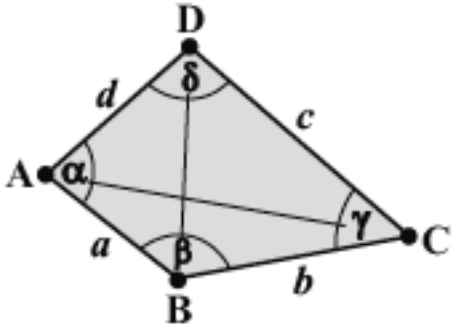
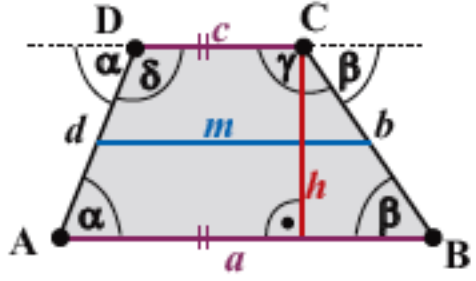
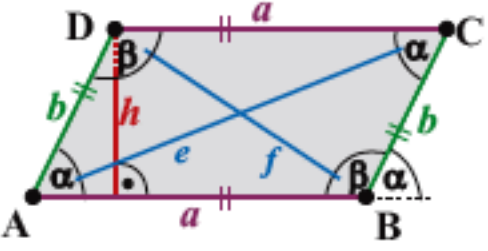
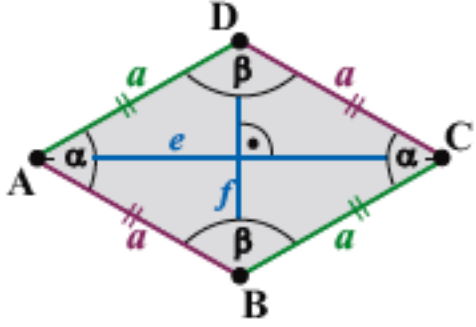
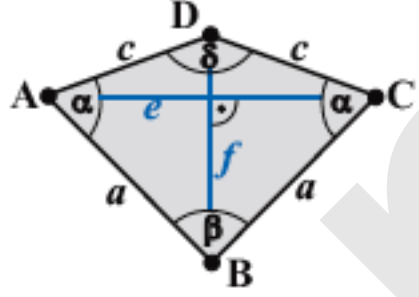
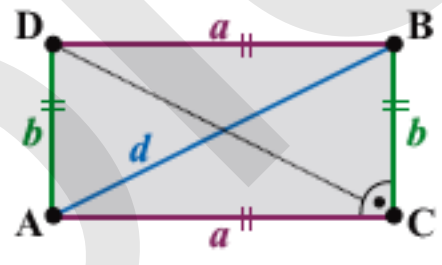
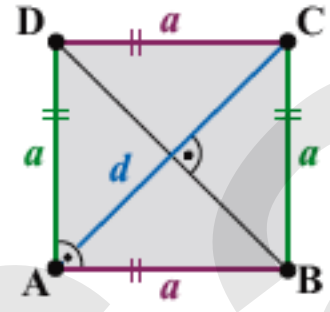
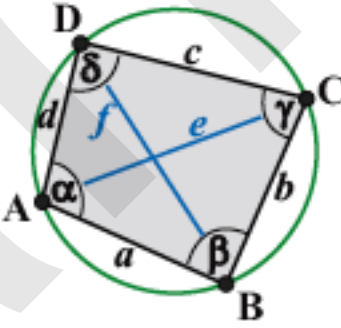
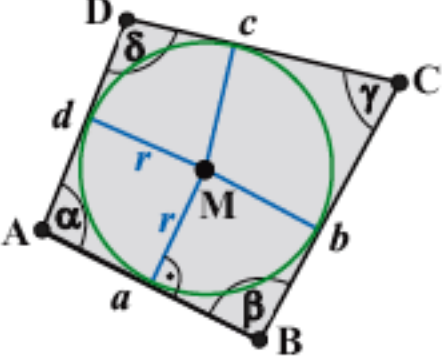
3.3 Triangles isocèles et équilatéraux

Triangle isocèle	Triangle équilatéral
 ► h_c est sur l'axe de symétrie.	 ► Hauteur: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ Aire: $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ ► Rayon du cercle... ...circonscrit: $R = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{2}{3} h$...inscrit: $r = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{1}{3} h$

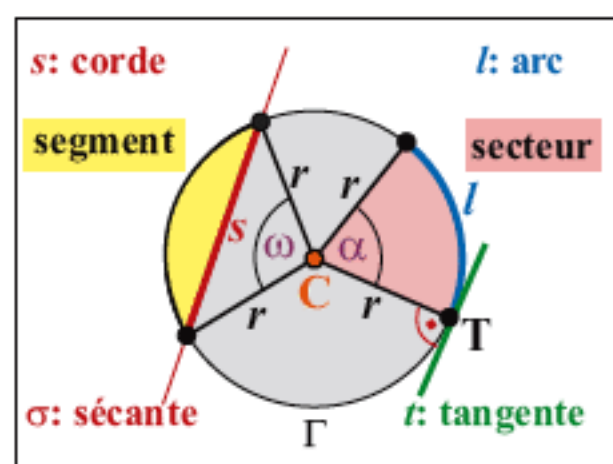
3.4 Lignes dans un triangle

Hauteurs h_a, h_b, h_c : Droites perpendiculaires à un côté et qui passent par le sommet opposé du triangle. 	Bissectrices $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$: Droites qui coupent un angle du triangle en deux parties égales. Tout point sur une bissectrice est situé à distance égale des deux côtés correspondants. Les bissectrices s'intersectent au centre M du cercle inscrit. 
Médianes s_a, s_b, s_c : Droites qui relient un sommet au milieu du côté opposé. Les médianes s'intersectent au centre de gravité du triangle dans un rapport 2:1. (voir p. 33). 	Médiatrices m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} : Droites perpendiculaires à un côté passant par le milieu de celui-ci. Tout point sur une médiatrice est équidistant aux sommets correspondants du triangle. Les médiatrices s'intersectent au centre M du cercle circonscrit au triangle. 

3.5 Quadrilatères

Quadrilatère quelconque  ► $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$	Trapèze  ► $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$	Parallélogramme  ► $A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$
Losange  ► $A = \frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \sin(\alpha)$	Cerf-volant  ► $A = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot c \cdot \sin(\alpha)$	Rectangle  ► $A = a \cdot b$
Carré  ► $A = a^2$ ► $d = a\sqrt{2}$	Quadrilatère inscrit (dans un cercle)  ► $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$ ► $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$	Quadrilatère circonscrit (à un cercle)  ► $a + c = b + d$ ► $A = r \cdot \frac{a+b+c+d}{2}$

3.6 Cercle



Périmètre

$$L = 2\pi r$$

Arc (longueur)

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha_{\text{deg}}}{360^\circ} = r \cdot \alpha_{\text{rad}}$$

Aire

$$A = \pi r^2$$

Secteur

$$A_{\text{Sec}} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha_{\text{deg}}}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha_{\text{rad}} = \frac{l \cdot r}{2}$$

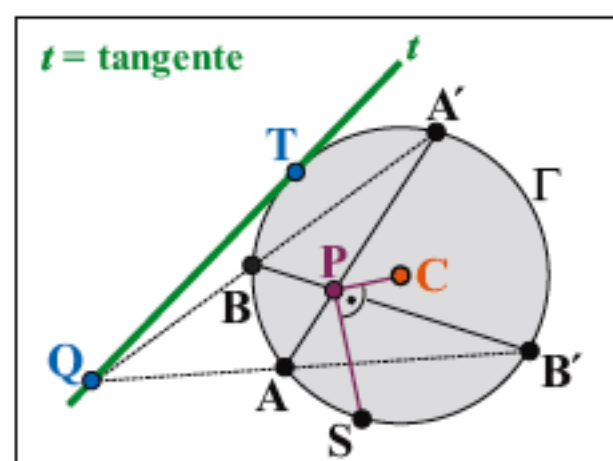
Segment

$$A_{\text{Seg}} = r^2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{\omega_{\text{deg}}}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot \sin(\omega_{\text{deg}}) \right) = \frac{r^2}{2} \cdot (\omega_{\text{rad}} - \sin(\omega_{\text{rad}}))$$

Puissance d'un point par rapport à un cercle

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PS}^2$$

$$\overline{QB} \cdot \overline{QA'} = \overline{QA} \cdot \overline{QB'} = \overline{QT}^2$$



► Equation du cercle Γ de centre $C(u; v)$ et rayon r :

forme canonique

distribuer,
développer

forme cartésienne

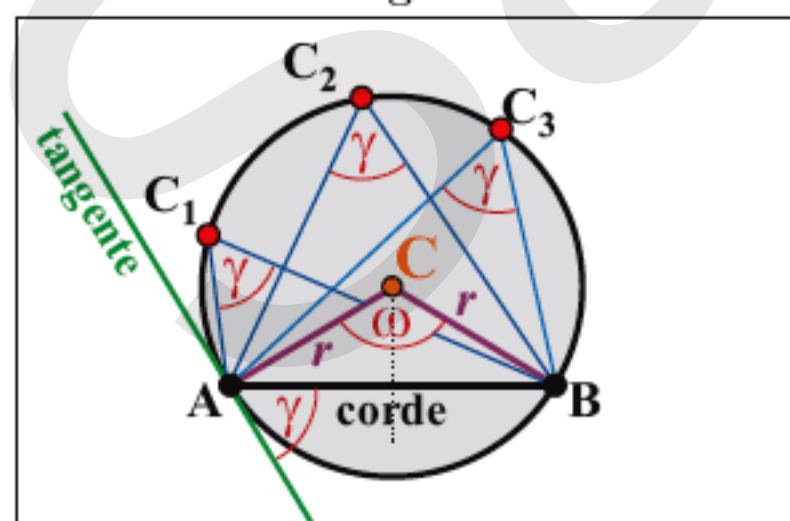
$$\Gamma: (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

$$\Gamma: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

compléter les carrés

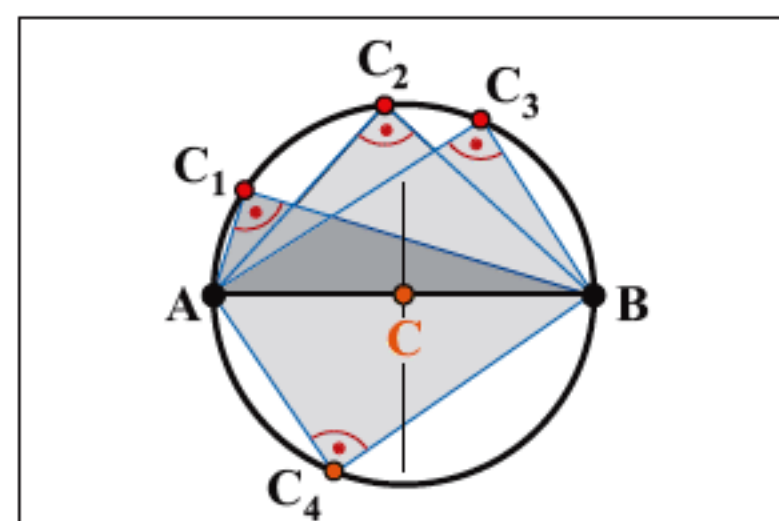
Tangente t à Γ au point $T(x_0; y_0) \in \Gamma$: $t: (x - u)(x_0 - u) + (y - v)(y_0 - v) = r^2$

Théorème de l'angle au centre



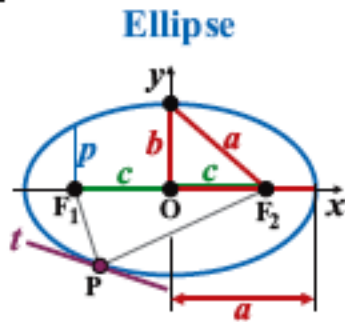
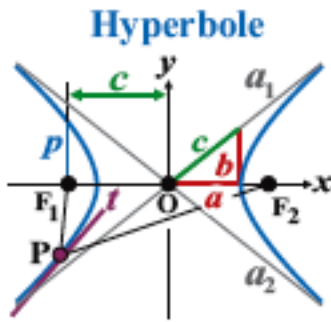
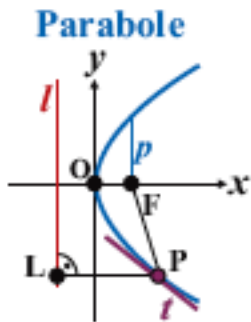
- Angles périphériques γ égaux.
- Angle au centre $\omega = 2\gamma$.

Théorème de Thalès



- Angles périphériques $\gamma = 90^\circ$.

3.7 Coniques

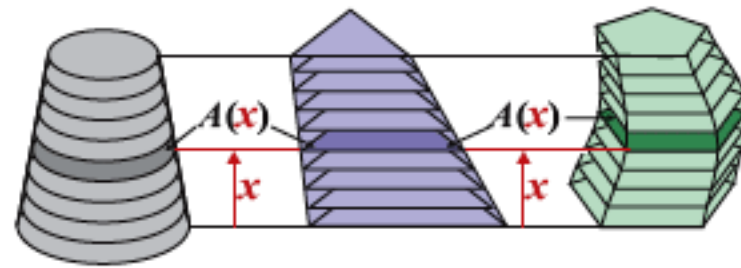
	 Ellipse	 Hyperbole	 Parabole
Définition	$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$	$ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$	$\overline{PF} = \overline{PL}$
Equation implicite centre O(0 ; 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
Equations paramétriques centre O(0 ; 0)	$\begin{cases} x(\varphi) = a \cdot \cos(\varphi) \\ y(\varphi) = b \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$	$\begin{cases} x(\varphi) = \pm a \cdot \cosh(\varphi) \\ y(\varphi) = b \cdot \sinh(\varphi) \end{cases}$	
Tangente en P(x ₀ ; y ₀)	$t : \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$	$t : \frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$	$t : y y_0 = p(x + x_0)$
Tangente: $t : y = m_t x + q$	$q^2 = a^2 m_t^2 + b^2$	$q^2 = a^2 m_t^2 - b^2$	$q = \frac{p}{2m_t}$
Direction conjuguée	$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$	$m_1 m_2 = +\frac{b^2}{a^2}$	
Excentricité linéaire	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	
Excentricité numérique	$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$	$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$	$\varepsilon = 1$
Foyers	$F_{1,2}(\pm c / 0)$	$F_{1,2}(\pm c ; 0)$	$F(\frac{p}{2} ; 0)$
Rayons de courbure	$r_a = \frac{b^2}{a}, r_b = \frac{a^2}{b}$	$r = \frac{b^2}{a}$	$r = p$
Paramètre p	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$	p
Aire	$A = \pi ab$		
Asymptotes		$a_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a} x$	

Translation de O(0 ; 0) à O'(u ; v): $x \rightarrow (x - u)$ et $y \rightarrow (y - v)$.

4 Géométrie classique dans l'espace

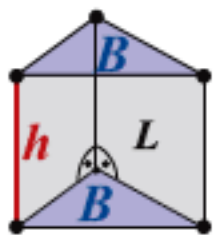
4.1 Principe de Cavalieri

Deux solides ont le même volume si les surfaces $A(x)$ interceptées par un plan horizontal sont égales pour toute altitude x .

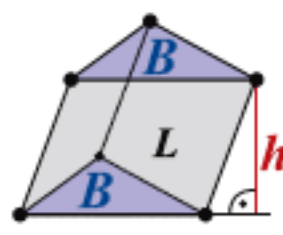


4.2 Prismes et cylindres

Prisme droit



Prisme oblique



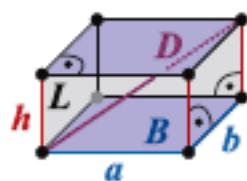
► B : Aire de base L : Aire latérale

► h : Hauteur

► Volume: $V = B \cdot h$

► Aire: $A = 2 \cdot B + L$

Parallélépipède rectangle

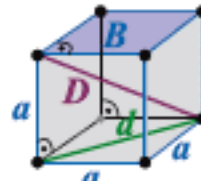


► $V = a b \cdot h$

► $A = 2(a b + a h + b h)$

► $D = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$

Cube

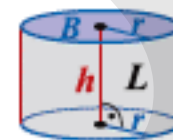


► $V = a^3$

► $A = 6 a^2$

► $D = a \sqrt{3}, \quad d = a \sqrt{2}$

Cylindre



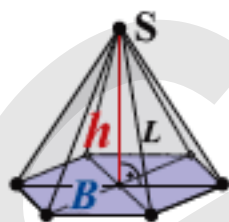
► $V = \pi r^2 \cdot h$

► $A = 2 \cdot \pi r^2 + 2 \pi r \cdot h$

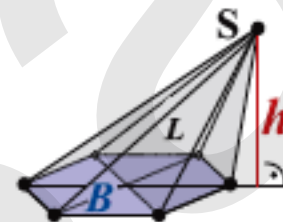
► $L = 2 \pi r \cdot h$

4.3 Pyramides et cônes

Pyramide droite



Pyramide oblique



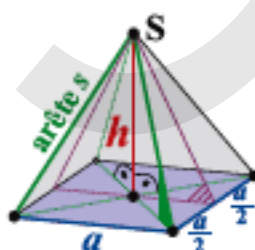
► B : Aire de base L : Aire latérale

► h : Hauteur

► Volume: $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$

► Aire: $A = B + L$

Pyramide carrée droite

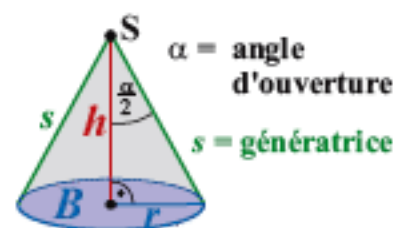


► $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

► $A = a^2 + L$

► $s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$

Cône droit

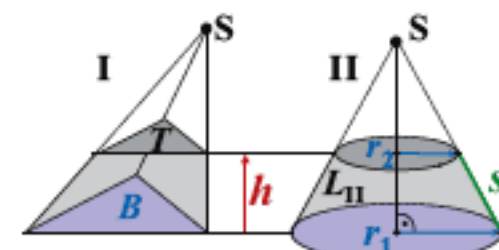


► $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

► $A = \pi r^2 + \pi r s, \quad L = \pi r s$

► $s = \sqrt{h^2 + r^2}$

Tronc de cône/pyramide



► $V_I = \frac{h}{3} (B + \sqrt{BT} + T)$

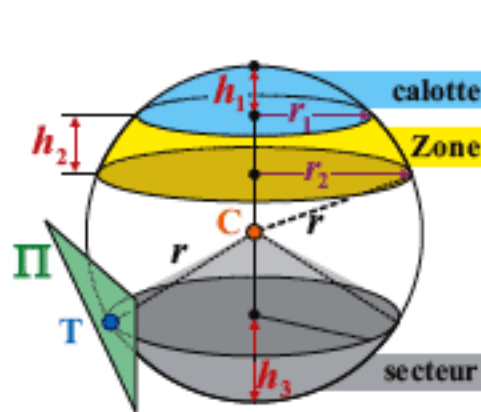
► $V_{II} = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

► $L_{II} = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

4.4 Sphère

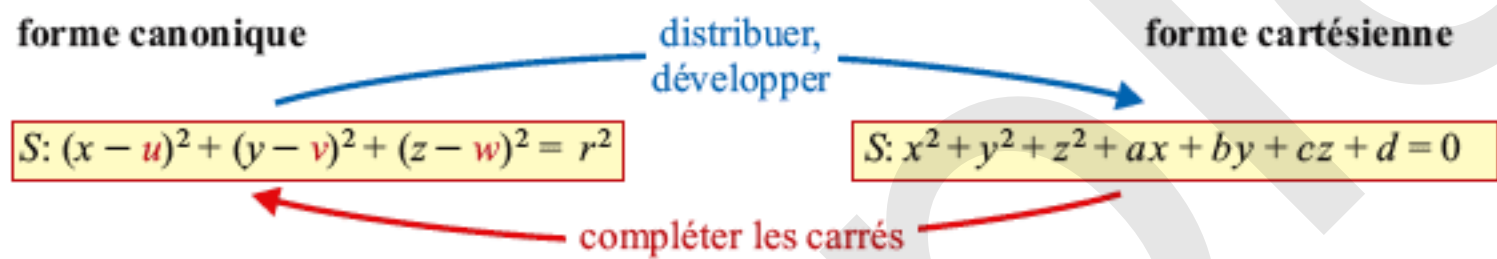
► Volume: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ (de la boule)

► Aire: $A = 4\pi r^2$ (de la sphère)



	Volume	Aire (surface totale)
Calotte:	$\frac{1}{3} \pi h_1^2 (3r - h_1)$	$2\pi r h_1 + \pi r_1^2$
Zone:	$\frac{1}{6} \pi h_2 (3r_1^2 + 3r_2^2 + h_2^2)$	$2\pi r h_2 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$
Secteur:	$\frac{2}{3} \pi r^2 h_3$	$2\pi r h_3 + \pi r \sqrt{2r h_3 - h_3^2}$

► Equation d'une sphère de centre $C(u ; v ; w)$ et rayon r :



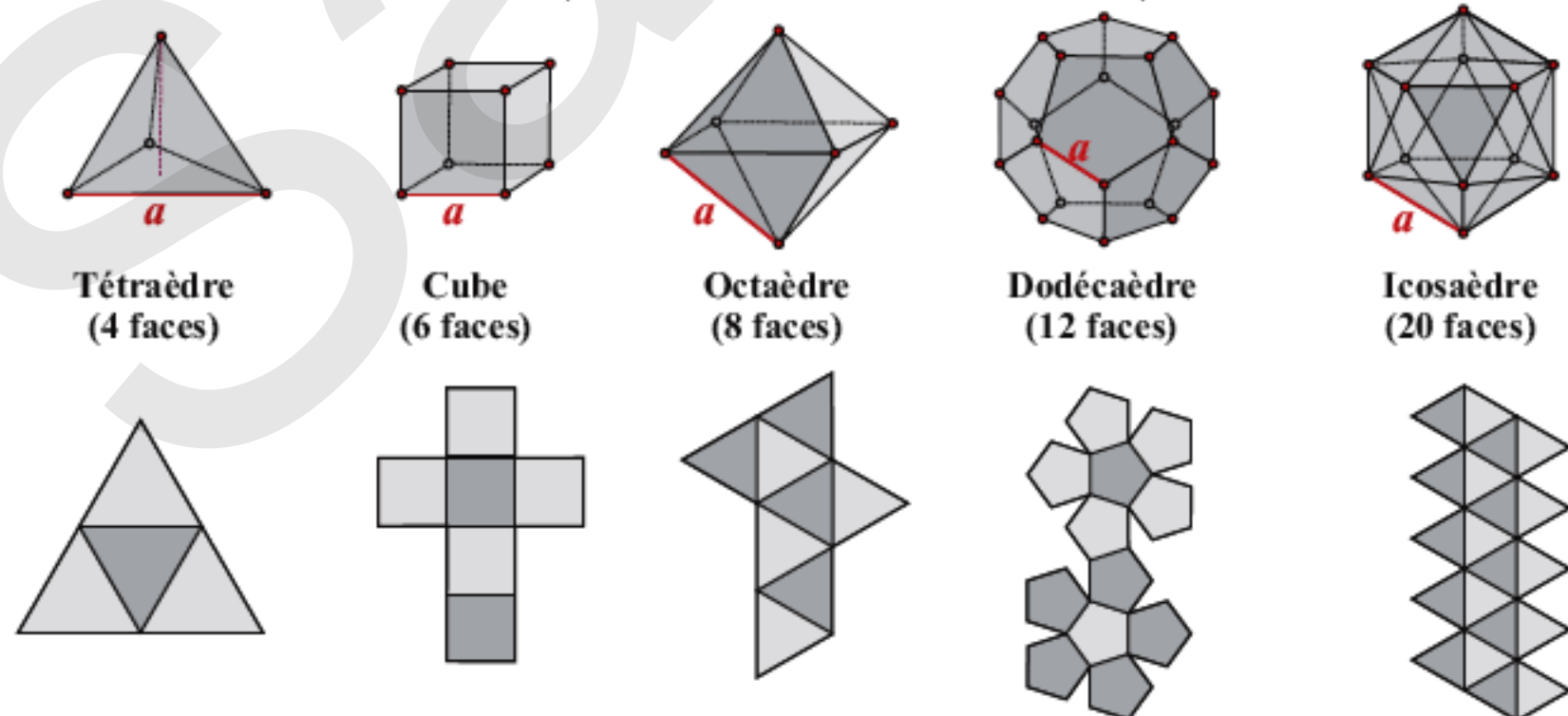
Plan tangent Π à une sphère en $T(x_T ; y_T ; z_T)$:

$$\Pi: (x - u)(x_T - u) + (y - v)(y_T - v) + (z - w)(z_T - w) = r^2$$

4.5 Polyèdres et solides platoniques

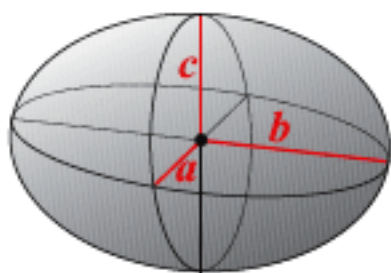
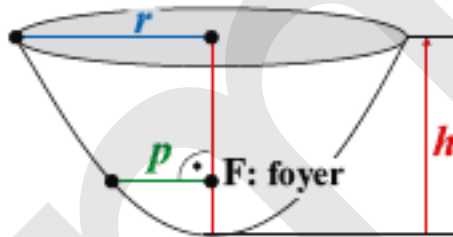
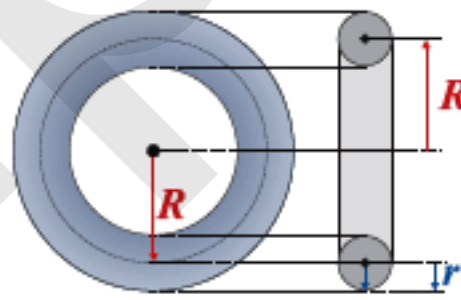
Théorème d'Euler: $S + F = A + 2$ où $\begin{cases} S : \text{nombre de sommets} \\ F : \text{nombre de faces} \\ A : \text{nombre d'arêtes} \end{cases}$

Les cinq solides de Platon (solides platoniques réguliers):

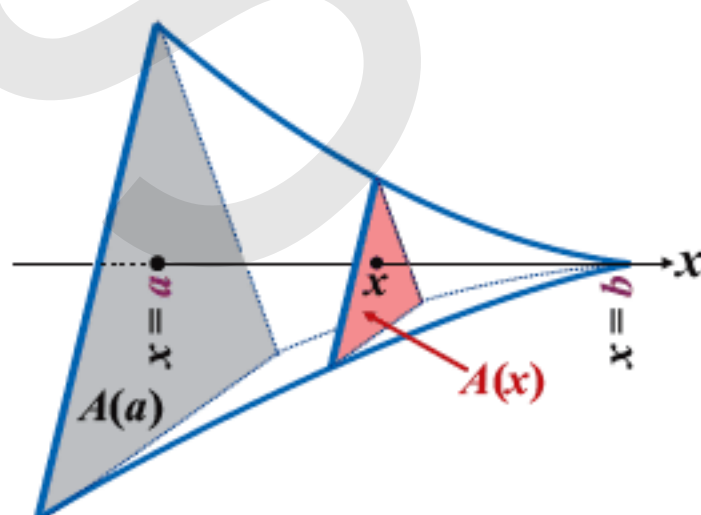


	Volume V	Aire A	rayon R du cercle circonscrit	rayon r du cercle inscrit
Tétraèdre	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$	$\sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{6}}{4} a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} a$
Cube	a^3	$6 a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2} a$	$\frac{1}{2} a$
Octaèdre	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$	$2 \sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{2} a$	$\frac{\sqrt{6}}{6} a$
Dodécaèdre	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4} a^3$	$3 \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} a^2$	$\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4} a$	$\frac{\sqrt{10+4.4\sqrt{5}}}{4} a$
Icosaèdre	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12} a^3$	$5 \sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4} a$	$\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{12} a$

4.6 Solides limités par des surfaces courbes

Ellipsoïde  ► $V = \frac{4}{3} \pi a b c$	Paraboloïde  ► $V = \frac{1}{2} \pi r^2 h = \pi p h^2$	Tore  ► $V = 2\pi^2 r^2 R$ ► $A = 4\pi^2 r R$
---	---	--

4.7 Calcul de volumes à l'aide des intégrales



- $V = \int_a^b A(x) dx$

$A(x)$: Aire de section ($\perp$ à l'axe Ox).

- Solides de révolution: Volume défini par une fonction $f(x)$ qui tourne autour de l'axe Ox :

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad \text{voir p. 31.}$$

5 Fonctions

Définition: Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une correspondance qui à tout x du domaine de définition $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}$ associe exactement un $y \in \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. $\text{Im}(f)$ est appelé domaine des valeurs ou codomaine.

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

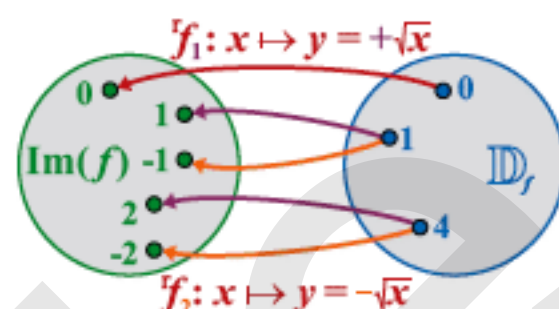
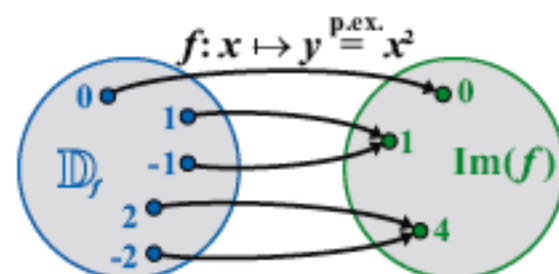
Fonction réciproque: ${}^r f : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{D}_f$ „annule” la fonction f :

$${}^r f(f(x)) = x \quad \text{resp.} \quad f({}^r f(y)) = y$$

Pour que la réciproque d'une fonction existe, il est généralement nécessaire de restreindre le domaine de définition afin que la fonction f devienne bijective.

Trouver la fonction réciproque:

- *Graphiquement:* Symétrie du graphe de f par rapport à $y = x$.
- *Algébriquement:* Résoudre l'équation $y = f(x)$ en x (si possible), ensuite échanger x et y .



Domaine de définition:

Ensemble des x possibles:

- $\frac{U(x)}{V(x)} \Rightarrow V(x) \neq 0$
- $\sqrt{g(x)} \Rightarrow g(x) \geq 0$
- $\log_a(g(x)) \Rightarrow g(x) > 0$

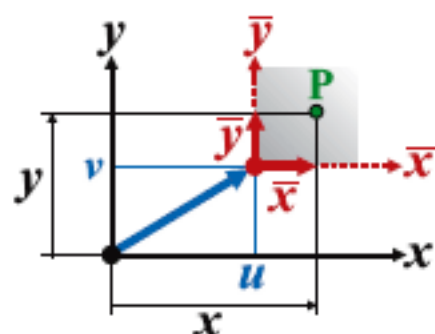
Table: Fonctions et leurs réciproques

Fonction	$y = f(x)$	$\mathbb{D}_f$	$\text{Im}(f)$	$y = {}^r f(x)$
Inverse	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Carré	x^2	$\mathbb{R}$	$y \geq 0$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
Puissance	x^n	$\mathbb{R}$	n paire: $y \geq 0$ n impaire: $\mathbb{R}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
Sinus	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$\arcsin(x)$
Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$\arccos(x)$
Tangente	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{(n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
Exponentielle	a^x	$\mathbb{R}$	$y > 0$	$\log_a(x)$

5.1 Translation, rotation du système de coordonnées

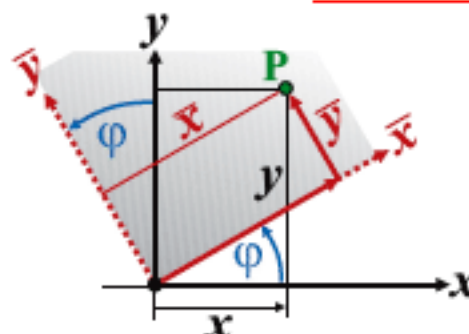
Translation de $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - u \\ \bar{y} &= y - v \end{aligned}$$

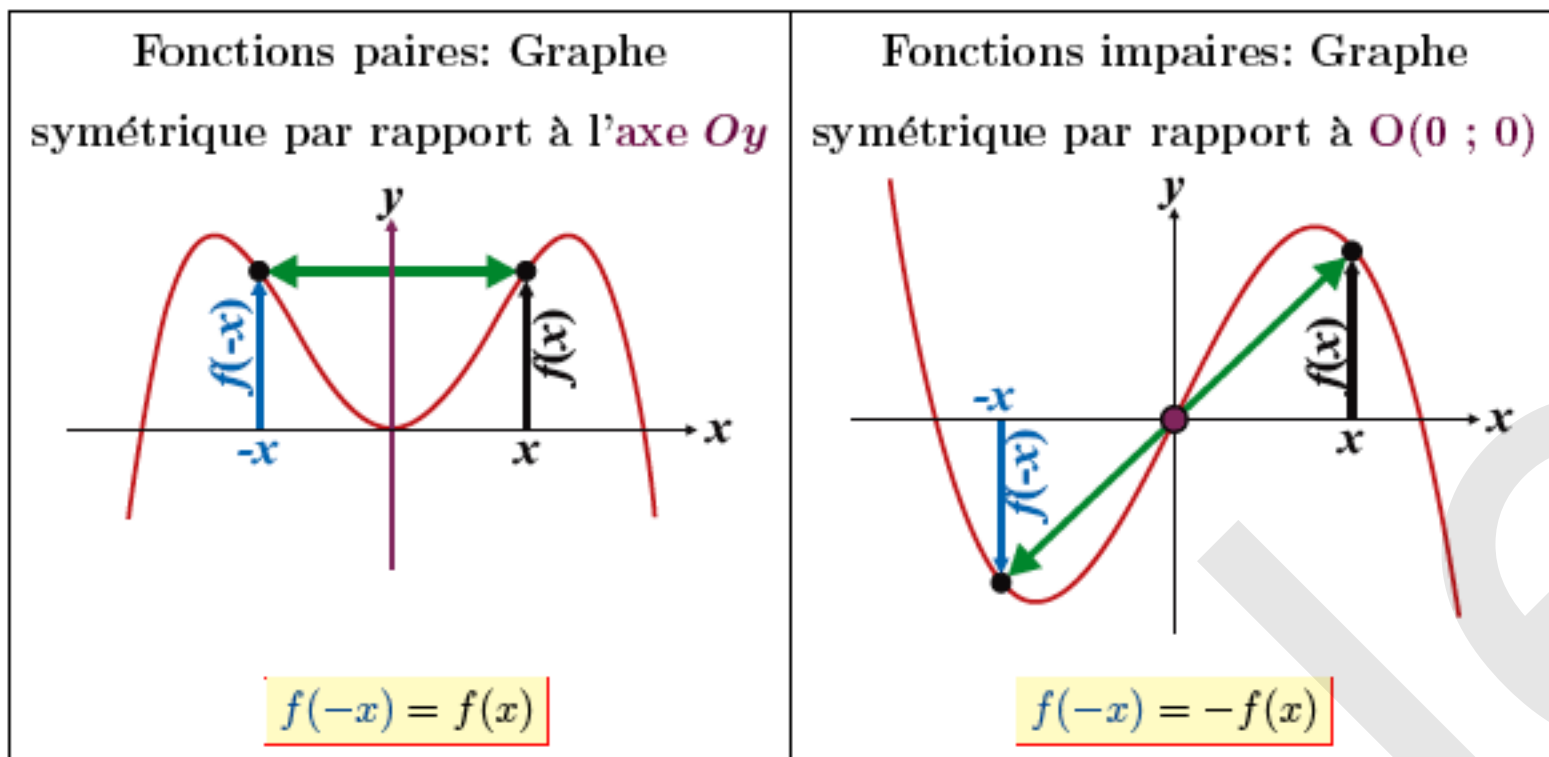


Rotation de φ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) \\ \bar{y} &= -x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi) \end{aligned}$$



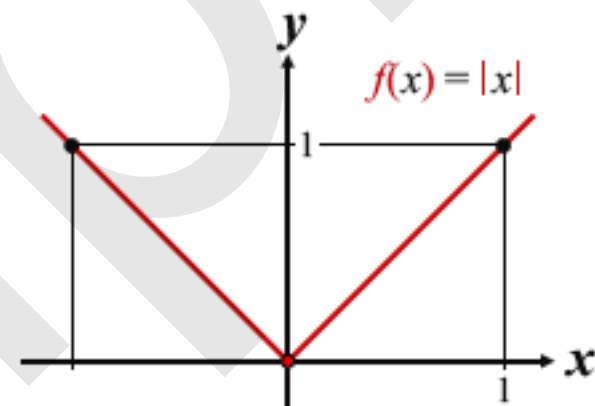
5.2 Parité des fonctions



5.3 Fonction valeur absolue

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

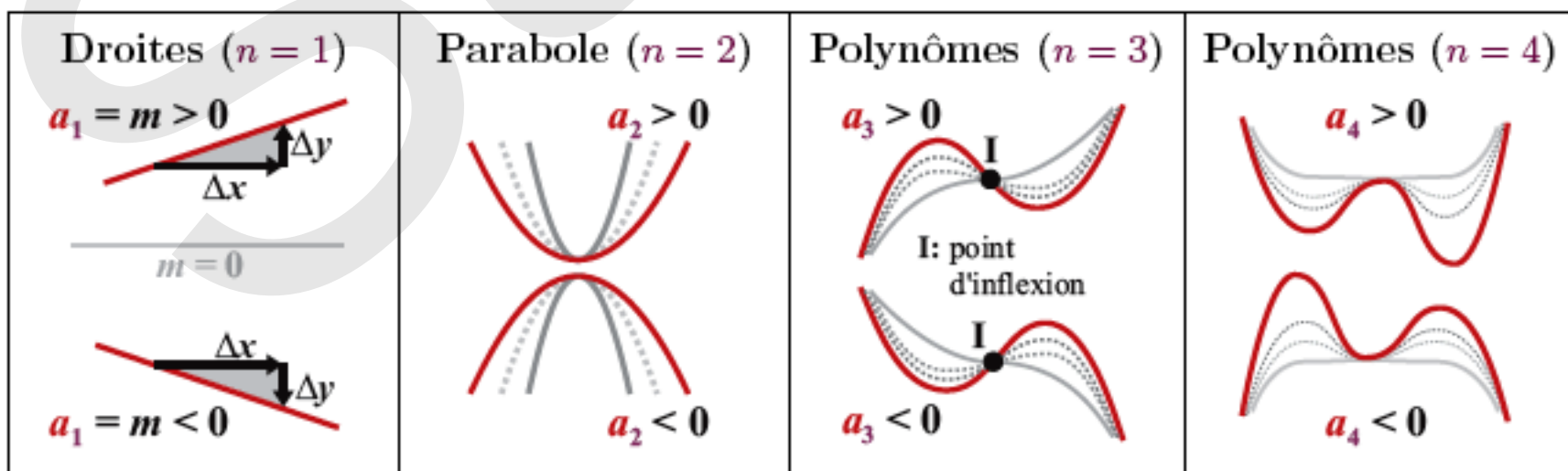
- $|x|$ est continue mais pas dérivable en $x = 0$.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$



5.4 Fonctions polynomiales

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{où } n : \text{degré de } f(x) \quad (a_n \neq 0).$$

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sont appelés les coefficients de $f(x)$.



5.5 Fonctions affines: les droites (voir aussi p. 34)

► Equation explicite: $f : y = m \cdot x + q$ ou $f : y = m \cdot (x - x_A) + y_A$, $A(x_A ; y_A) \in f$

• Pente: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\alpha)$

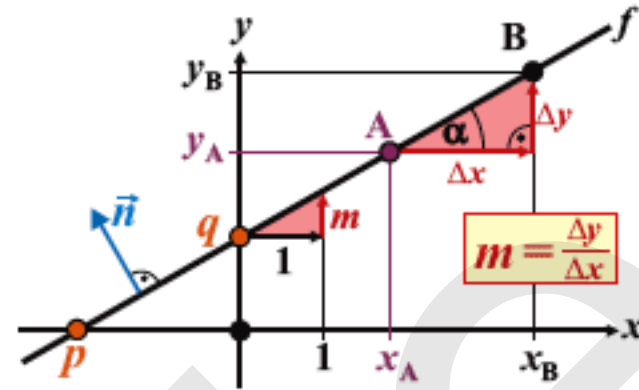
• Ordonnée à l'origine: q .

► Equations implicites: (plus de détails p. 34)

• $f : ax + by + c = 0$ (équ. cartésienne)

où $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à f .

• $f : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{\pm\infty\}$ intersections de f avec les axes du repère.

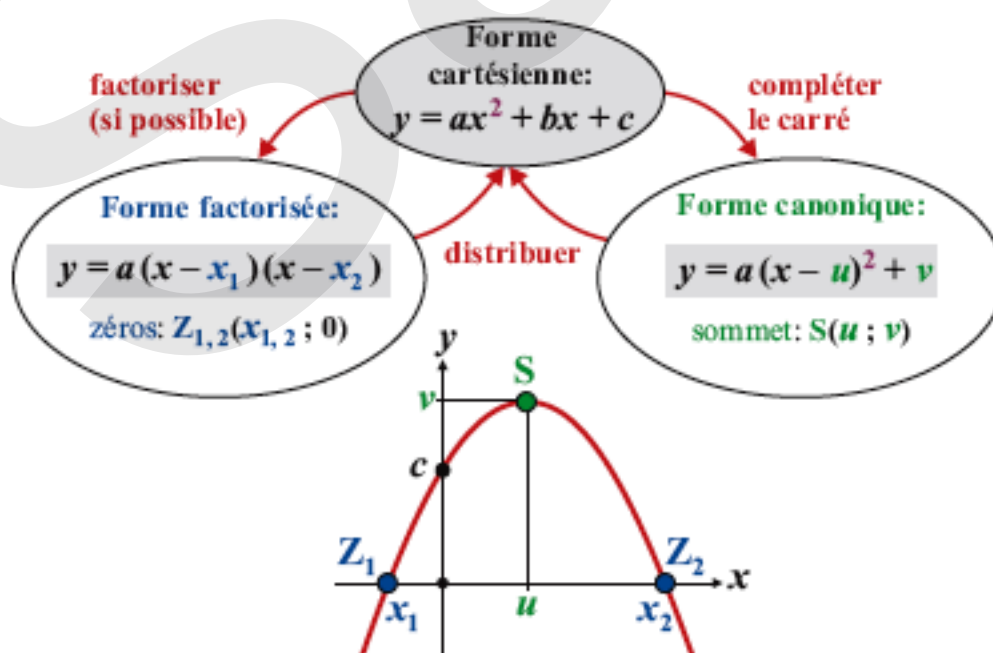


	$f_1 \parallel f_2$	$f_1 \perp f_2$	$\varphi = \angle(f_1 ; f_2)$
$f : y = mx + q$	$m_1 = m_2$	$m_1 = -\frac{1}{m_2}$	$\tan(\varphi) = \left \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right $

⇒ Autres équations des droites voir p. 34.

⇒ Equation des plans voir p. 35.

5.6 Paraboles (fonctions quadratiques)



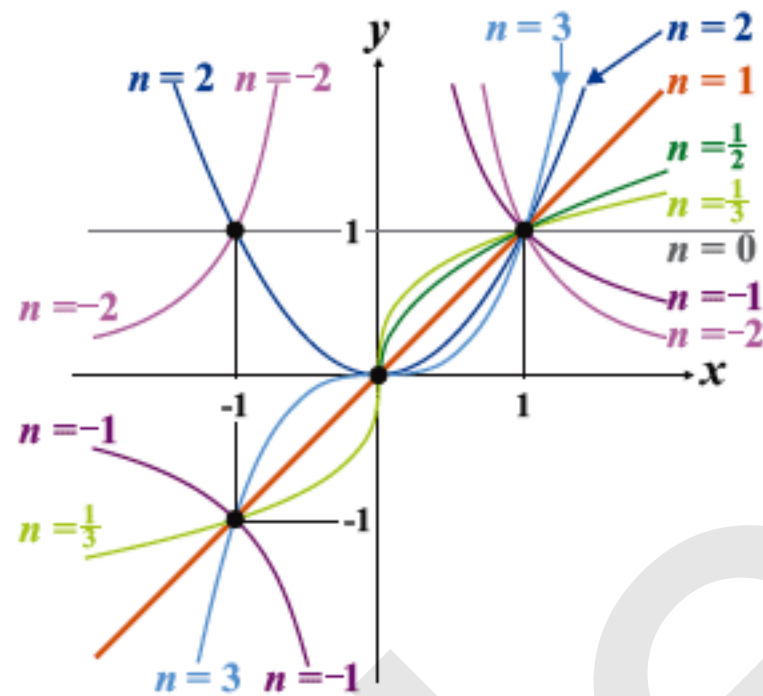
- a : Ouverture:
 $a < 0$ vers le bas $\cap$
 $a > 0$ vers le haut $\cup$
 $a = 1$ parabole normale.
- b : Terme linéaire.
- c : Ordonnée à l'origine.
- Sommet $S(u ; v)$ où
 $u = -\frac{b}{2a}$; $v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

⇒ Equations du second degré p. 21.

5.7 Fonctions x puissance n

$$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Q}$$

- $n = 0$ Fonction constante.
- $0 < n < 1$ Fonction racine n -ème.
- $n = 1$ Fonction linéaire.
- $n \in \mathbb{N}; n > 1$ Parabole degré n -ème.
- $n \in \mathbb{Z}; n < 0$ Hyperbole degré n -ème.



5.8 Fonctions rationnelles

$$f(x) = \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

degré: $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
coefficients: $a_n, b_m \neq 0$

► Asymptote verticale: $y \rightarrow \pm\infty$

$x = x_0$ est une asymptote verticale de $f(x)$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad (\text{„vraie” division par zero pour } x = x_0).$$

► Asymptote horizontale / oblique:

Fonction polynôme $a(x)$ dont la fonction $f(x)$

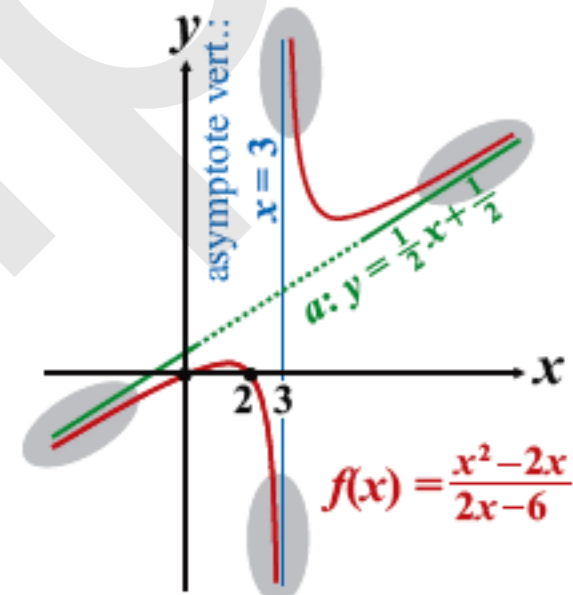
s'approche pour $x \rightarrow \pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - a(x)) = 0$

- $n < m$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow a: y = 0$

- $n = m$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \Rightarrow a: y = \frac{a_n}{b_m}$

- $n > m$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{division} \\ \text{euclidienne:} \end{array} \right\} f(x) = \frac{U(x)}{V(x)} = a(x) + \frac{R(x)}{V(x)} \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{R(x)}{V(x)} = 0$

$\Rightarrow$ Pour $n \geq m + 1$ l'asymptote $a(x)$ est une fonction polynôme du degré $(n - m)$ (voir p. 15, 16).



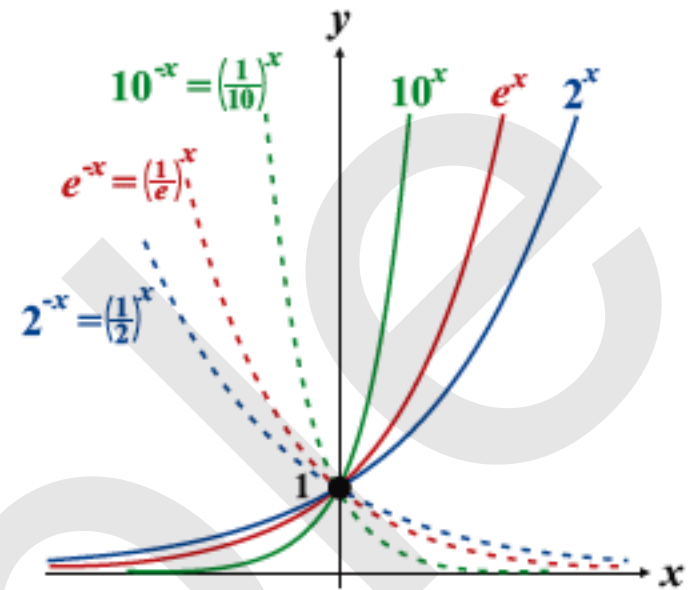
5.9 Fonctions exponentielles, fonctions logarithmes

► Fonction exponentielle: $y = f(x) = a^x$ $a > 0, x \in \mathbb{R}$

Base particulière: **Constante de Néper**: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718... .$
aussi appelée "**Nombre d'Euler**"

► Croissance exponentielle: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ ou $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$

- N_0 : Population initiale
- $N(t)$: Population au temps t
- $a = 1 \pm \frac{p}{100}$ Facteur de croissance ($a = e^k$)
- p : Croissance en % par unité du temps
- k : Constante de croissance ($k = \ln(a)$)
- Demi-vie: $T = -\frac{\ln(2)}{\ln(a)} = -\frac{\ln(2)}{k}, \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ k < 0 \end{cases}$



⇒ Lois des puissances, racines et logarithmes voir p. 5.

⇒ Dérivées et primitives voir p. 29.

► Fonctions logarithmes (Règles de calcul des logarithmes voir p. 5):

$${}^r f(x) = \log_a(x) \quad \begin{matrix} x > 0 \\ a > 0; a \neq 1 \end{matrix}$$

${}^r f(x) = \log_a(x)$ est la f. réciproque de $f(x) = a^x$:

- **Logarithme décimal:**

$${}^r f(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$$

$$\log(10^x) = x, \quad 10^{\log(x)} = x \quad (x > 0)$$

- **Logarithme népérien (naturel):**

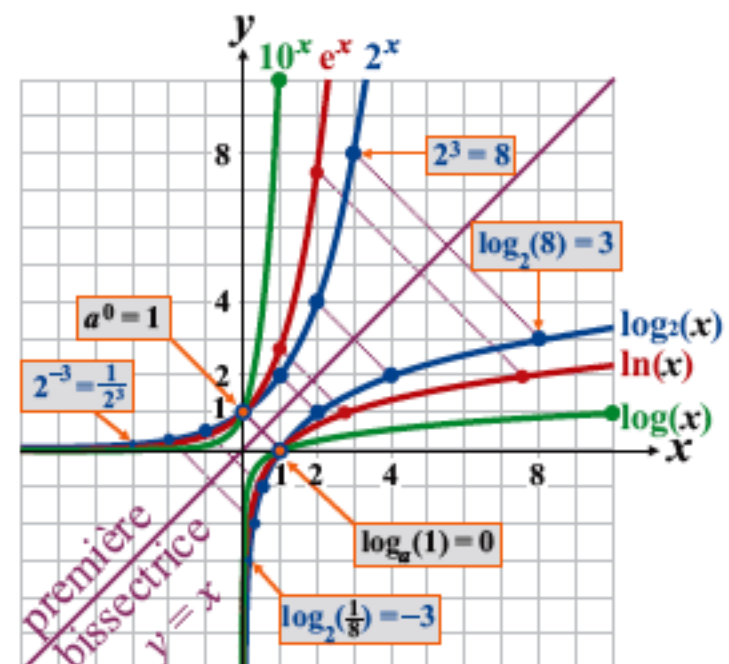
$${}^r f(x) = \log_e(x) = \ln(x), \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln(x)} = x \quad (x > 0)$$

- **Logarithme binaire:**

$${}^r f(x) = \log_2(x) = \text{lb}(x)$$

$$\log_2(2^x) = x, \quad 2^{\log_2(x)} = x \quad (x > 0)$$



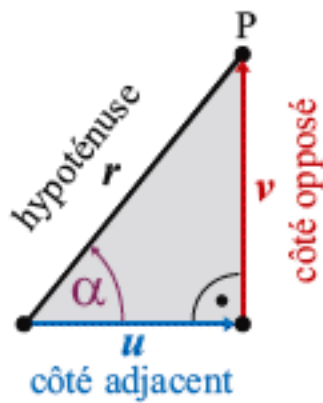
⇒ Dérivées et primitives voir p. 29.

5.10 Fonctions trigonométriques

► Définition: (voir p. 6)

Triangle rectangle: $0 < \alpha < 90^\circ$

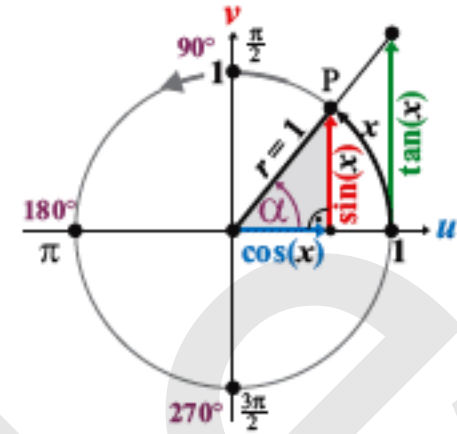
Cercle trigonométrique: $\alpha \in \mathbb{R}$



$$\sin(\alpha) = \frac{v}{r} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

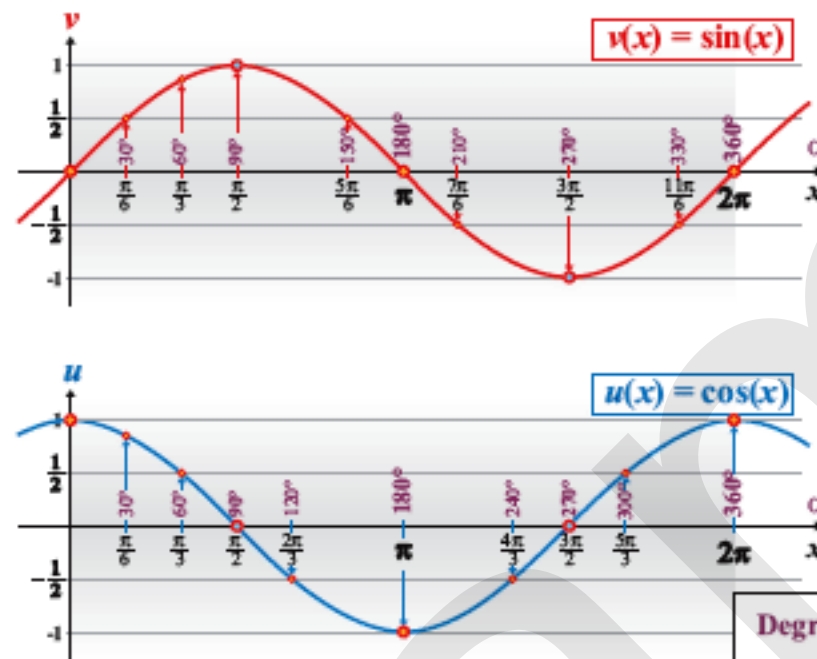
$$\cos(\alpha) = \frac{u}{r} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{v}{u} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

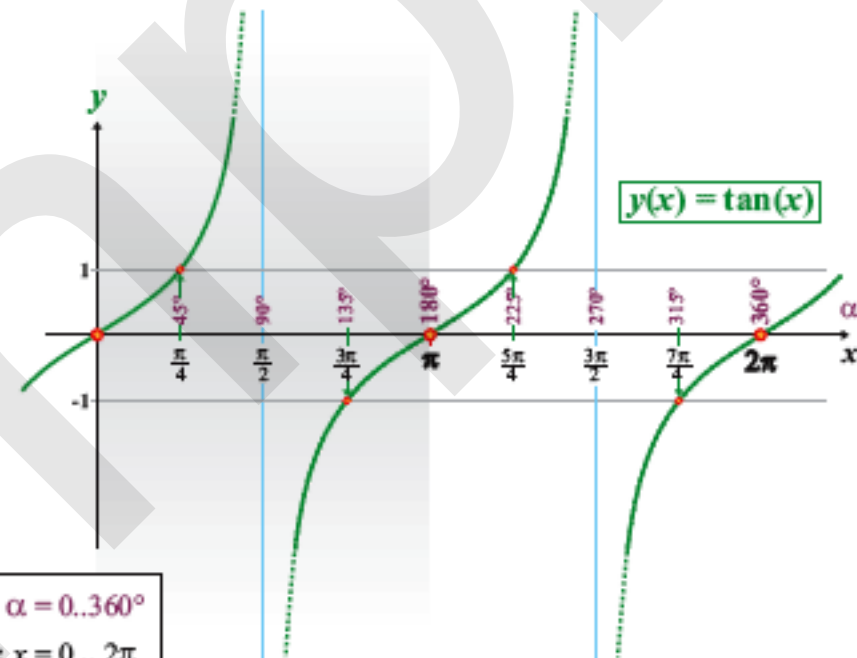


Radians: $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ longueur d'arc x correspondant à α (en degrés) dans le cercle trigonométrique.

► Graphes:



Degrés: $\alpha = 0..360^\circ$
Radians: $x = 0..2\pi$



► Propriétés et table de valeurs particulières:

	$0^\circ \doteq 0$	$30^\circ \doteq \frac{\pi}{6}$	$45^\circ \doteq \frac{\pi}{4}$	$60^\circ \doteq \frac{\pi}{3}$	$90^\circ \doteq \frac{\pi}{2}$	périodicité	symétrie
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$360^\circ \doteq 2\pi$ $\sin(x + 2\pi n) = \sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$360^\circ \doteq 2\pi$ $\cos(x + 2\pi n) = \cos(x)$	$\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$(\pm\infty)$	$180^\circ \doteq \pi$ $\tan(x + \pi n) = \tan(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$

► Domaines de définition: $\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{D}_{\cos} = \mathbb{R}$ $\mathbb{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{(\frac{\pi}{2} + n\pi), n \in \mathbb{Z}\}$

► Domaines de valeurs: $\mathbb{W}_{\sin} = \mathbb{W}_{\cos} = [-1, 1]$ $\mathbb{W}_{\tan} = \mathbb{R}$

► Fonctions réciproques: $\begin{cases} \arcsin(x) & (\text{écrit parfois } \sin^{-1}(x)) \\ \arccos(x) & (\text{écrit parfois } \cos^{-1}(x)) \\ \arctan(x) & (\text{écrit parfois } \tan^{-1}(x)) \end{cases}$

Relations et propriétés des fonctions trigonométriques

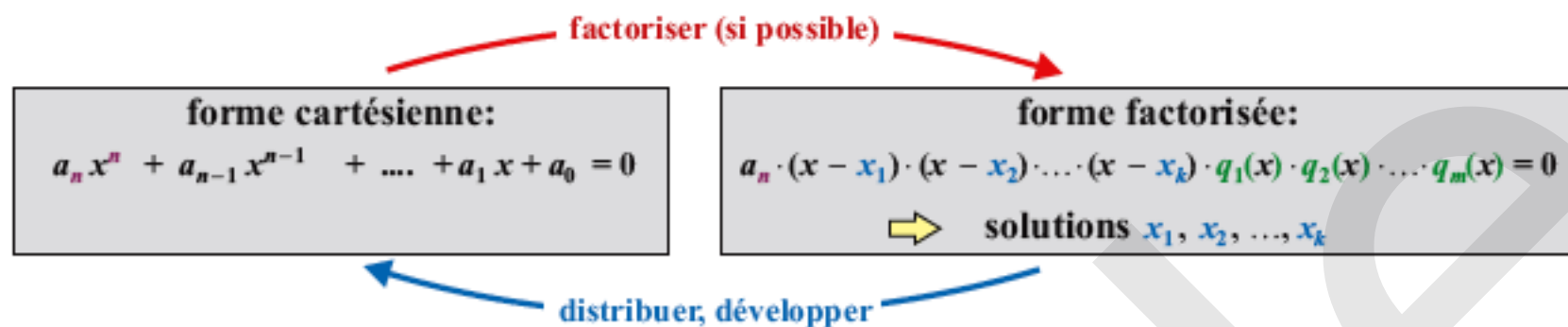
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \frac{1}{\tan(x)}$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	$\cos(2x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2\sin^2(x) \end{cases}$	$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$	$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$	$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)}$	
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$		
$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	
$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	

⇒ Dérivées et primitives voir p. 29.

6 Equations

6.1 Théorème fondamental de l'algèbre

Sur $\mathbb{R}$, tout polynôme de degré n peut être écrit comme produit de $k \leq n$ facteurs linéaires ou quadratiques irréductibles $q_1(x), q_2(x), \dots, q_m(x) \neq 0$:



6.2 Equations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$

Solutions: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Delta \geq 0$

Théorème de Viète:

Produit des solutions: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Somme des solutions: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

6.3 Equations polynomiales (degré 3 et supérieur)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

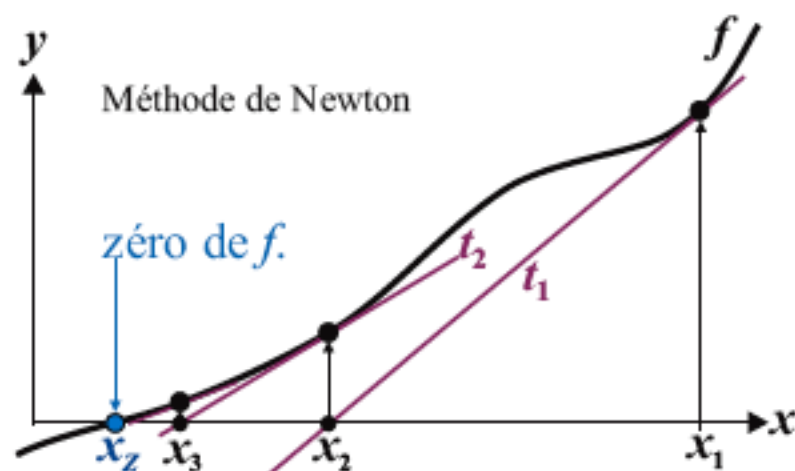
La division de l'équation par $a \neq 0$ mène à $a' = 1$, donc $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$. S'il existe une solution entière ($x_1 \in \mathbb{Z}$), celle-ci divise d' . Il suffit de trouver une solution x_1 en essayant les diviseurs de d' et ensuite de diviser l'équation par $(x - x_1)$ (division euclidienne).

6.4 Algorithme de Newton

Trouver un zéro $Z(x_Z; 0)$ d'une fonction $f(x)$ donnée: Partant d'une valeur initiale x_1 construire une suite recursive $x_1, x_2, x_3, \dots$ de limite x_Z .

Choisir $P_1(x_1; f(x_1))$ avec $f'(x_1) \neq 0$. Puis:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_Z \quad (\text{la suite n'est pas forcément convergente.})$$



7 Matrices, systèmes d'équations linéaires

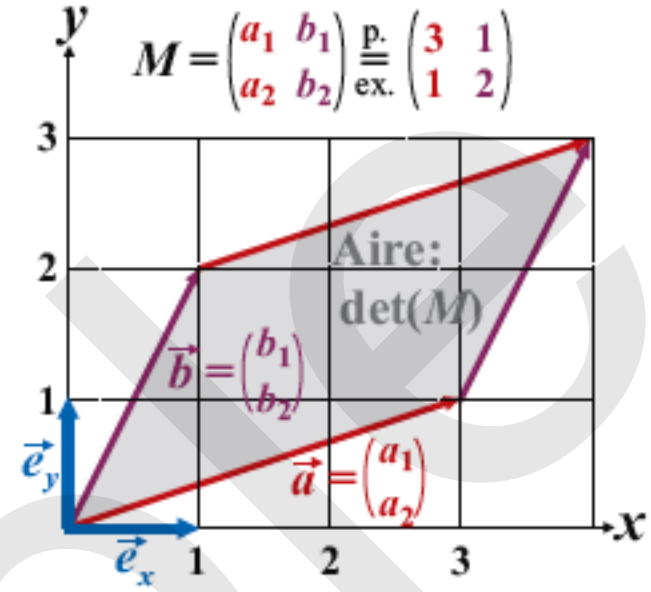
7.1 Systèmes d'équations linéaires, matrices 2×2

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{équivalent: } \boxed{M \cdot \vec{x} = \vec{c}}$$

- La multiplication à gauche par l'inverse M^{-1} de M résout l'équation $M \cdot \vec{x} = \vec{c}$ en $\vec{x}$:

$$\boxed{\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{c}} \quad (\text{uniquement si } M^{-1} \text{ existe}).$$

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ représente une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: A tout vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ correspond un vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



- Les colonnes $\vec{a}$, $\vec{b}$ de la matrice M sont les images des **vecteurs de la base canonique** ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$) par la transformation linéaire associée à la matrice M .

7.2 Opérations et propriétés des matrices:

► Matrice unité: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

► Addition, soustraction: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm u_1 & b_1 \pm v_1 \\ a_2 \pm u_2 & b_2 \pm v_2 \end{pmatrix}$

• $M_1 \pm M_2 = M_2 \pm M_1$

• $(M_1 + M_2) + M_3 = M_1 + (M_2 + M_3)$

► Pré-multiplication par un nombre réel: $k \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k a_1 & k b_1 \\ k a_2 & k b_2 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

► Post-multiplication par un vecteur: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}$

► Produit de deux matrices: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1u_1 + b_1u_2 & a_1v_1 + b_1v_2 \\ a_2u_1 + b_2u_2 & a_2v_1 + b_2v_2 \end{pmatrix}$

• $M_1 \cdot M_2 \neq M_2 \cdot M_1$

• $(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$

- Matrice transposée: $M^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $M^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$
- $(M_1 + M_2)^T = M_1^T + M_2^T$
 - $(M_1 \cdot M_2)^T = M_2^T \cdot M_1^T$
 - $(M^T)^T = M$
- matrice inverse: $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I_n$
- $(M_1 \cdot M_2)^{-1} = M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}$
 - $(M^{-1})^{-1} = M$
 - $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$
- $$M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad \det(M) \neq 0.$$
- Déterminant: $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$
- $$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
 - $\det(I_n) = 1$
 - $\det(A^T) = \det(A)$
 - $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
 - $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$
- Rang: Nombre de lignes linéairement indépendantes. La matrice $n \times n$ M est...
- régulière si $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(M) = n \Leftrightarrow M^{-1}$ existe.
 - singulière si: $\det(M) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(M) < n \Leftrightarrow M^{-1}$ n'existe pas.
- Matrices orthogonales: $M \cdot M^T = M^T \cdot M = I_n$ ou $M^T = M^{-1}$
- Vecteurs propres, valeurs propres: Le vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ est un **vecteur propre** de M associé à la **valeur propre** λ , si $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$. La transformation M ne change pas la direction de $\vec{v}$.
- Equation caractéristique: $\det(M - \lambda I_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots$
 - Trouver les **vecteurs propres** $\vec{v}_k \neq \vec{0}$: $(M - \lambda_k I_n) \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$
- Algorithme du pivot de Gauss:
- Multiplication d'une ligne par un nombre.
 - Addition de deux lignes.
 - Permutation de deux lignes.
- Résoudre un système d'éq. lin.:
- Ecrire le système en forme de matrice: $[M \mid \vec{c}]$.
 - Transformer M en une matrice unité à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.
- Matrices particulières:

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rotation d'un angle α dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.	Symétrie par rapport à l'axe Ox .	Symétrie par rapport à l'axe Oy .

8 Suites et séries

► Une suite $a_1, a_2, a_3, \dots$ est une fonction $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k \mapsto a_k$.

- Définition explicite: $a_k = \{\text{expression en } k \text{ uniquement}\}$.
- Définition récursive: $a_{k+1} = \{\text{expression en } a_k, a_{k-1}, \dots\}$ ainsi que a_1 donné.

► Une série $s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$ $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

est la suite des sommes partielles d'une suite $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ donnée.

8.1 Suites et séries arithmétiques

Différence d constante entre deux termes consécutifs:

Définition	récursive	explicite
Suite	$a_{k+1} = a_k + d$	$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$
Série	$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$	$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$

8.2 Suites et séries géométriques

Quotient q constant entre deux termes consécutifs:

Définition	récursive	explicite
Suite	$a_{k+1} = a_k \cdot q$	$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$
Série	$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$	$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad q \neq 1, \quad s_n = n \cdot a_1 \text{ pour } q = 1$ $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{si } q < 1 \quad (\text{série géom. infinie})$

8.3 Autres séries

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \quad (\text{série harmonique})$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

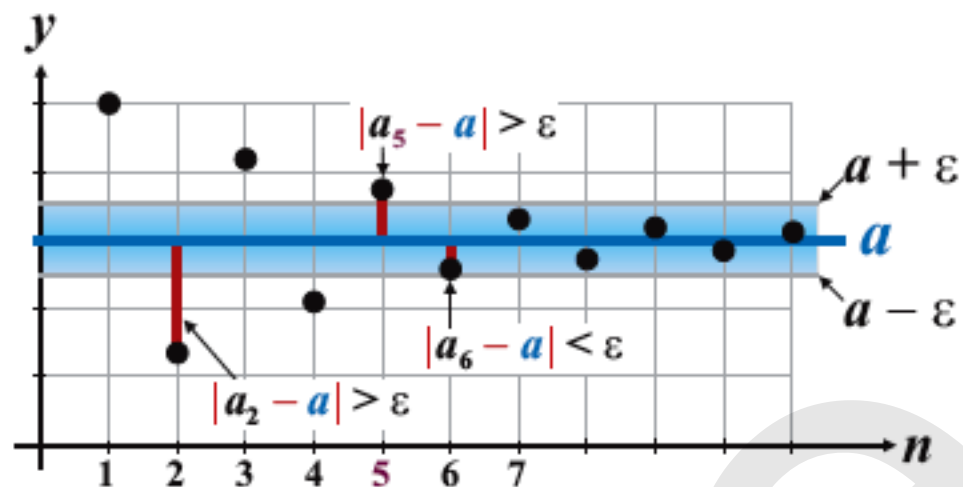
$$s_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{1}{2} n(n+1) \right)^2$$

8.4 Limites

Définition: Une suite a_n est convergente de limite $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, s'il existe un indice $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n > N$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$.

Pour n tendant vers l'infini, la distance entre a_n et a devient arbitrairement petite (inférieure à tout $\varepsilon > 0$).



- Une limite est toujours unique et finie.
- Les suites sans limite ou celles de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ sont divergentes.
- Expressions non-définies: $\frac{0}{0}$, $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, $0 \cdot (\pm\infty)$ et $\infty - \infty$

► Règles de calcul des limites: Si $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existent:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, si $b \neq 0$

⇒ Des règles équivalentes sont valables pour des limites du type $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

► Fonctions exponentielles: $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < a < 1 \\ 1, & \text{si } a = 1 \\ \infty, & \text{si } a > 1 \end{cases}$

► Fonctions rationnelles:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{si } n = m \\ \pm\infty, & \text{si } n > m \end{cases}$$

► Règle de dominance (règle des puissances comparées):

- La croissance exponentielle est plus forte que celle des puissances: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$
- La croissance des puissances x^n , $n > 0$ est plus forte que la croissance logarithmique: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

► Règle de l'Hôpital: Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (ou ∞) et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (ou ∞), alors:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe}) \quad \text{Exemple: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

8.5 Valeurs moyennes

Soient n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ donnés.

- Moyenne arithmétique simple: $\bar{x}_A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ (voir p. 39)

- Moyenne arithmétique pondérée: $\bar{x}_A = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$

où $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont les coefficients de pondération (fréquences) des valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- Moyenne quadratique: $\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$

- Moyenne géométrique: $\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$

- Moyenne harmonique: $\bar{x}_H = n \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)^{-1}$ $x_k \neq 0$

Inéquation: $\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A \leq \bar{x}_Q$ vaut si $x_k \geq 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$.

8.6 Section d'or

La Section d'or Φ est le rapport harmonique $\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ où

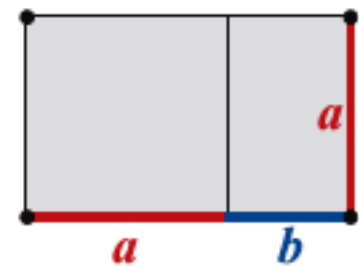
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \Phi = 1.618... \\ \bar{\Phi} = -0.618... \end{cases}$$

Propriétés:

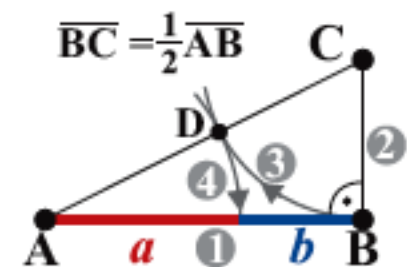
- $\bar{\Phi} = -\frac{1}{\Phi}$
- Φ est irrationnel et peut aussi être écrit sous la forme:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \quad \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Rectangle d'or:



Section harmonique du segment $\overline{AB}$:



8.7 Induction mathématique

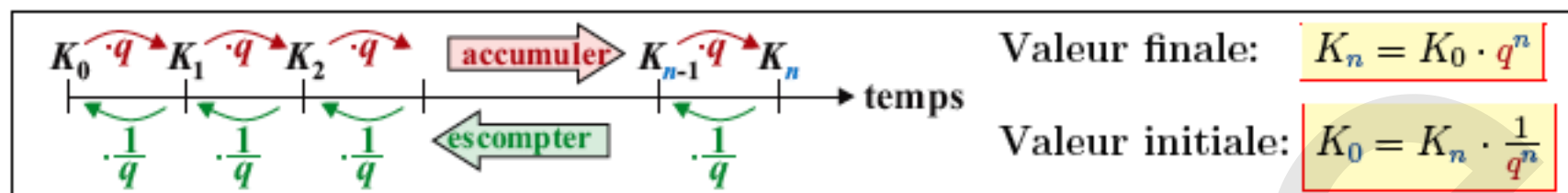
Méthode de preuve pour des assertions A_n sur les entiers naturels. Règles d'inférence:

- (I) **Ancrage:** Vérifier que l'assertion A_1 est vraie pour $n = 1$.
- (II) **Pas d'induction** (pas de n à $n+1$): Montrer par récurrence que A_{n+1} est vrai, sous l'hypothèse d'induction que A_n est vraie.

9 Mathématiques financières

Facteur d'intérêt: $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i$ $\begin{cases} p & : \text{intérêt (annuel) en \%} \\ i = \frac{p}{100} & : \text{taux d'intérêt.} \end{cases}$

► Intérêt composé: Capital initial K_0 , durée de n périodes d'intérêt (ans):



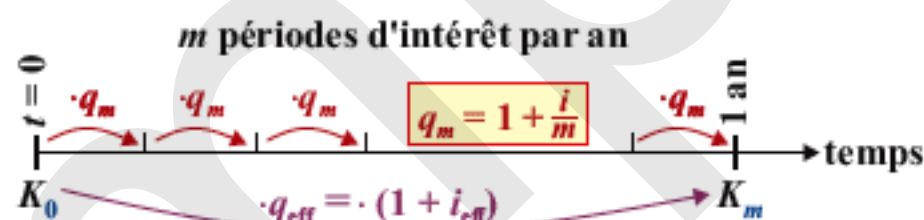
► Intérêts simples / composés:

intérêt simple	intérêt composé	Intérêt continu:
Capital K_T au bout de T jours (sans int. composé): $K_T = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{T}{360}$	m périodes d'intérêt par an. Durée totale: n ans. $K_{n \cdot m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}$	paiement d'un intérêt continu (arbitrairement petit): $K_S = \lim_{m \rightarrow \infty} K_{n \cdot m} = K_0 \cdot e^{i \cdot n}$

Taux d'intérêt effectif:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

$$q_m = \sqrt[m]{q_{\text{eff}}}$$



► Calcul des rentes (loyers): Au capital initial K_0 sont payées n rentes (loyers) R :

rente versée à l'avance		rente versée à terme échu	
val. initiale $B_0 =$ $K_0 + \frac{R}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}$	val. finale $E_n =$ $K_0 q^n + R q \frac{q^n - 1}{q - 1}$	val. initiale $B_0 =$ $K_0 + \frac{R}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}$	val. finale $E_n =$ $K_0 q^n + R \frac{q^n - 1}{q - 1}$

⇒ En cas d'amortissement, R est appelé taux d'amortissement ou annuité (voir p. 24).

► Dérivées en mathématiques financières:

Fonction marginale

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Taux de croissance

$$r(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln(f(t))$$

Elasticité

$$\varepsilon_f(x) = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

10 Calcul différentiel

Condition préalable: Soit donnée une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$.

- **Pente de la sécante:**

Taux d'accroissement moyen
de $f(x)$ dans $[x, x+h]$:

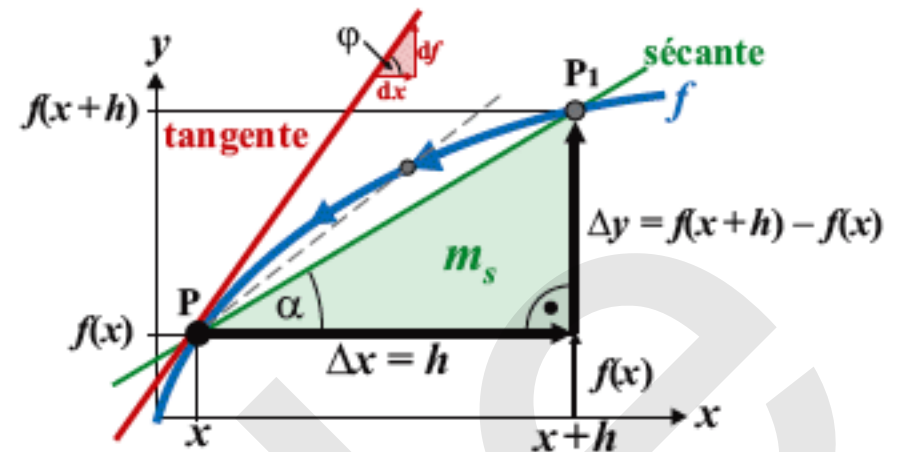
$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\alpha)$$

- **Pente de la tangente:**

Taux de variation instantané
à la courbe $f(x)$ en $P(x; f(x))$.

Définition de la dérivée première (nombre dérivé):

$$m_t = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\varphi)$$



10.1 Règles de dérivation:

Soient $y = f(x)$, $y = u(x)$ et $y = v(x)$
des fonctions continues, c une constante.

► **Constantes:**

$$f(x) = u(x) \pm c \Rightarrow f'(x) = u'(x)$$

$$f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

► **Somme, diff.: $f(x) = u(x) \pm v(x)$**

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

► **Produit: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

► **Quotient: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$**

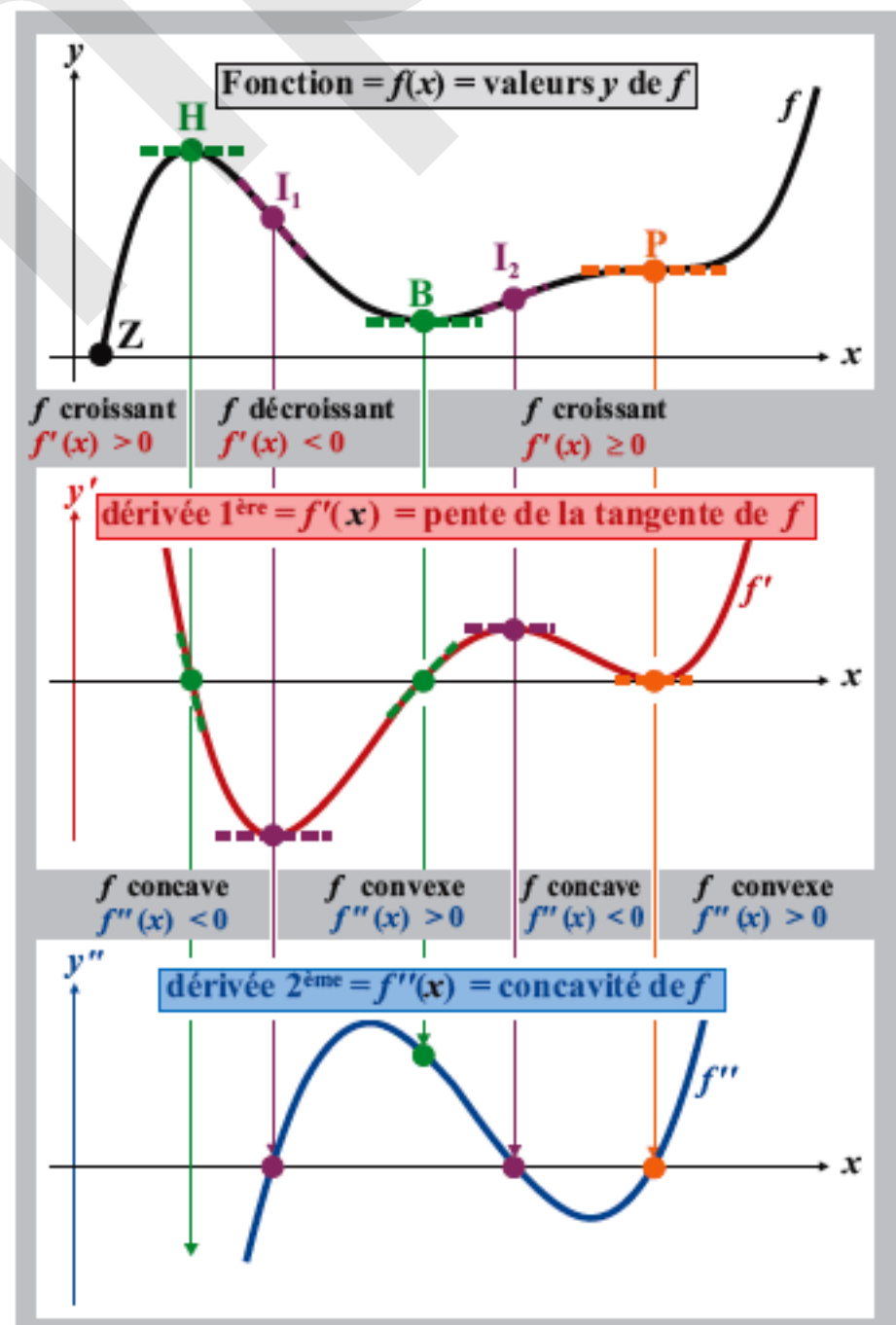
$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

► **Composée: $f(x) = u(v(x))$**

$$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

„dér. externe fois dér. interne.”

Conditions pour des extrema et des points
d'inflexion: Relation entre $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$:

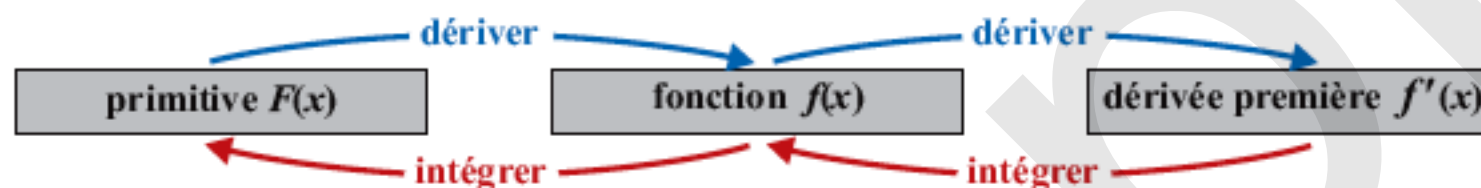


10.2 Conditions pour les points particuliers:

		f	f'	f''	f'''
Zéro	$Z(x_Z / 0)$	$f(x_Z) = 0$	-	-	-
Maximum	$H(x_H / f(x_H))$		$f'(x_H) \stackrel{\star}{=} 0$	$f''(x_H) \stackrel{\blacklozenge}{<} 0$	-
Minimum	$B(x_B / f(x_B))$		$f'(x_B) \stackrel{\star}{=} 0$	$f''(x_B) \stackrel{\blacklozenge}{>} 0$	-
Palier	$P(x_P / f(x_P))$		$f'(x_P) \stackrel{\star}{=} 0$	$f''(x_P) \stackrel{\star}{=} 0$	$f'''(x_P) \stackrel{\blacklozenge}{\neq} 0$
Point d'inflexion	$I(x_I / f(x_I))$		-	$f''(x_I) \stackrel{\star}{=} 0$	$f'''(x_I) \stackrel{\blacklozenge}{\neq} 0$

★ = condition nécessaire, (★ + ◆) = conditions suffisantes.

10.3 Table de dérivées et primitives



$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad [n \neq -1]$	x^n	$n x^{n-1}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\frac{2}{3} x \sqrt{x}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^x
$x (\ln(x) - 1)$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$\frac{1}{\ln(a)} a^x$	a^x	$\ln(a) a^x$
$\frac{x}{\ln(a)} (\ln(x) - 1)$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
A observer: Variable x toujours en radians!		
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln(\cos(x))$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x))$	$\sin^2(x)$	$2 \sin(x) \cos(x)$
$\frac{1}{2} (x + \sin(x) \cos(x))$	$\cos^2(x)$	$-2 \sin(x) \cos(x)$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

11 Calcul intégral

Définition: $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Deux primitives $F_1(x)$ et $F_2(x)$ de $f(x)$ ne diffèrent tout au plus que d'une constante: $F_2(x) = F_1(x) + C$. La constante C s'appelle **constante d'intégration**.

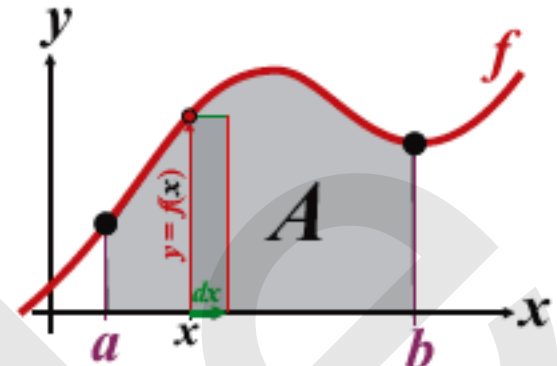
- Intégrale indéfinie: Ensemble de **toutes** les primitives d'une fonction:

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

- Intégrale définie:
Théorème fondamental du calcul intégral:

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

A = Aire sous f entre $x = a$ et $x = b$ si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.



11.1 Règles d'intégration

► Constante: $\int_a^b (c \cdot f(x)) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$

► Somme et différence: $\int_a^b (u(x) \pm v(x)) dx = \int_a^b u(x) dx \pm \int_a^b v(x) dx$

► Signe d'une intégrale: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

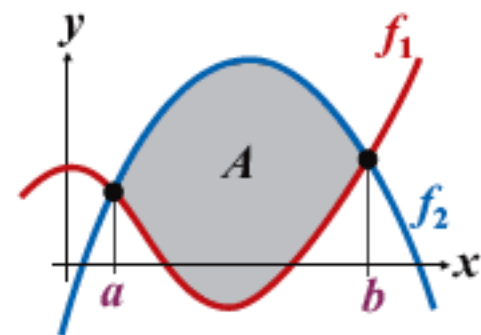
► Relation de Chasles: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

► „Signe” d'une aire: $\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \text{ pour } x \in [a, b] \\ f(x) \leq 0 \text{ pour } x \in [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$

► Aire entre f_1 et f_2 : $A = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$

- Intégration par parties:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$



- Intégration par changement de variable: Soit $f(x) = u(v(x))$ une fonction composée. Soit $U(v)$ une primitive de $u(v)$. On a:

$$\int_a^b u(v(x)) \cdot v'(x) dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(v) dv = [U(v)]_{v(a)}^{v(b)}$$

11.2 Volume d'un solide de révolution, longueur d'une courbe

- Rotation autour de l'axe Ox : $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

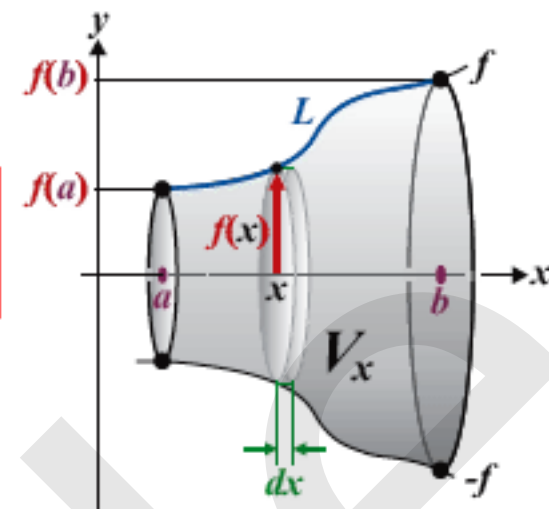
Généralisation voir p. 13.

- Rotation autour de l'axe Oy : $V_y = \pi \int_a^b ({}^r f(y))^2 dy$

$y = f(x)$ bijective.

$x = {}^r f(y)$ est la réciproque de $y = f(x)$ (voir p. 14).

- Longueur de $f(x)$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$



11.3 Séries de puissances, Polynômes de Taylor

► Polynôme de Taylor $T_n(x)$: Approximation d'une fonction $f(x)$ au voisinage de x_0 par une fonction polynôme du degré n :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k \quad \text{où } f^{(k)}(x) \text{ est la dérivée } k\text{-ème de } f(x). \text{ En détail:}$$

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Erreur} \\ \text{Reste} \end{array} \right\} R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \alpha(x - x_0)), \quad 0 < \alpha < 1$$

► Séries de puissances:

Terme	Série de puissances	domaine
$(1+x)^n$	$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$	$n \in \mathbb{N}; x < 1$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots$	$ x < 1$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots$	$ x < 1$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \mp \dots$	$0 < x \leq 2$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$

12 Géométrie vectorielle

Définition: Un vecteur $\vec{r}_A$ décrit une translation. Un vecteur possède une longueur (norme) et une orientation (direction).

Tout vecteur peut être arbitrairement déplacé: Un vecteur n'a aucun point de départ fixe.

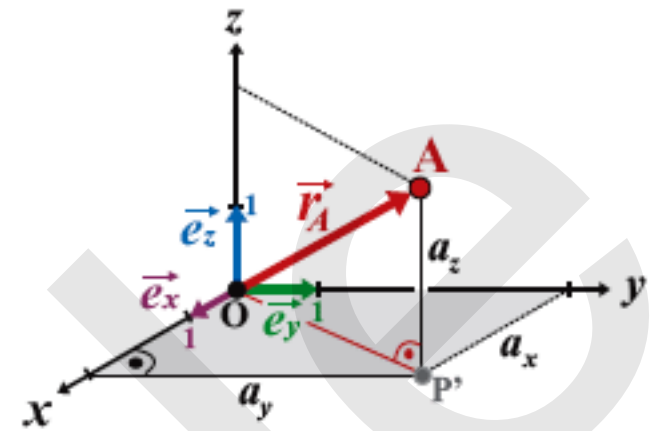
► Vecteurs unité:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

► Combinaison linéaire: Tout vecteur tridimensionnel $\vec{r}_A$ peut être écrit comme combinaison linéaire de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z.$$

a_x, a_y, a_z sont les composantes de $\vec{r}_A$.



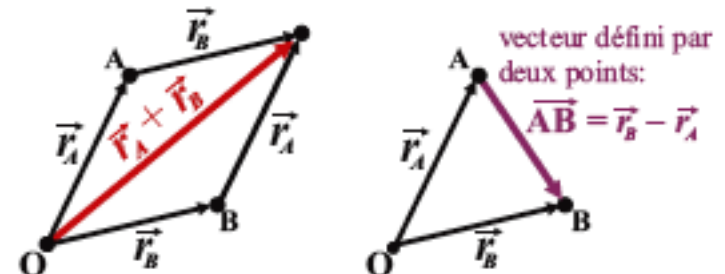
► Vecteur position de $A(a_x ; a_y ; a_z)$: $\vec{r}_A = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$: vecteur de l'origine O au point A.

► Norme (longueur) d'un vecteur: $\|\vec{r}_A\| = \|\vec{OA}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

► Addition, soustraction, vecteur résultant:

$$\vec{r}_A \pm \vec{r}_B = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

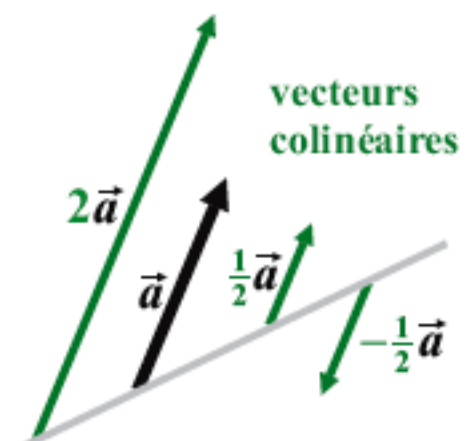
vecteur défini par deux points: Vecteur position du point final moins vecteur position du point initial.



► Multiplication d'un vecteur par un réel

Vecteurs colinéaires $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

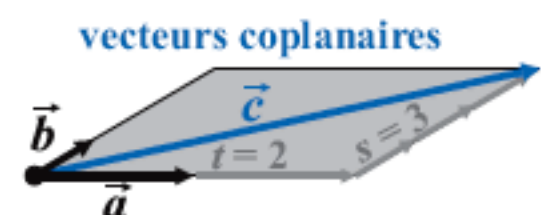
$$\vec{b} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix}$$



Vecteurs coplanaires: $\vec{c}$ est coplanaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$

si $\vec{c}$ peut être écrit comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

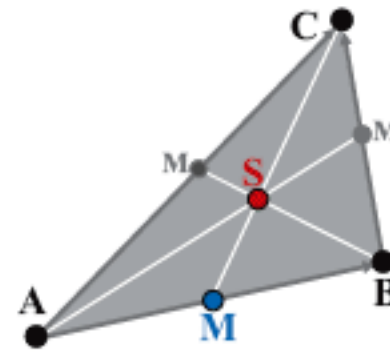
$$\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \quad \text{avec } t, s \in \mathbb{R}.$$



- Point-milieu M de A et B: $\vec{r}_M = \frac{1}{2} (\vec{r}_A + \vec{r}_B)$

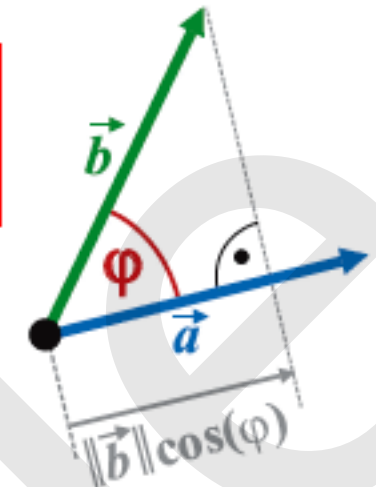
- Centre de gravité S du triangle ABC:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3} (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) \quad (\text{voir p. 7})$$



- Produit scalaire:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$$



- Angle φ entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

- Vecteurs perpendiculaires: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

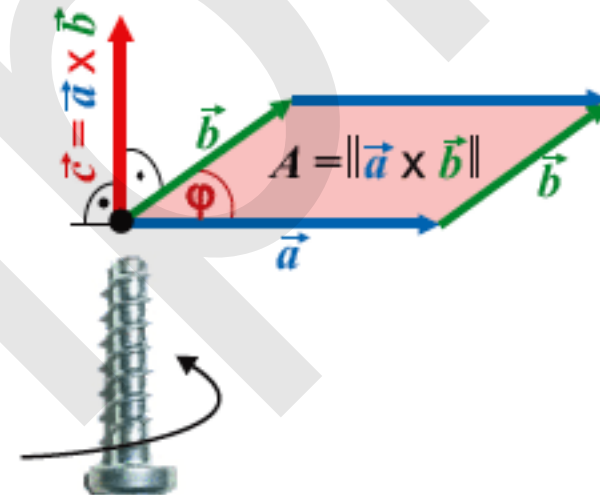
- Produit vectoriel:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ et } \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$$

$\|\vec{c}\|$: Aire du parallélogramme défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

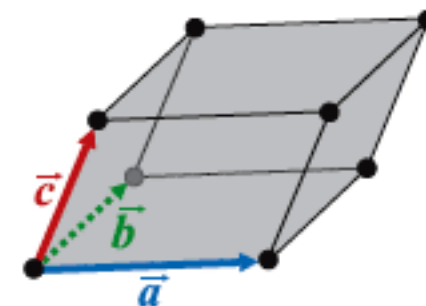


- Produit mixte:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

V : Volume du parallélépipède engendré par $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

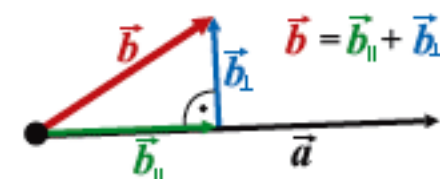
$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$



- Vecteur unité en direction de $\vec{a}$: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

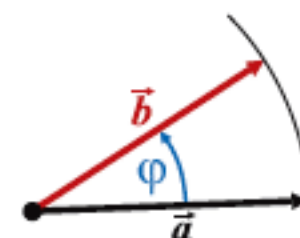
- Décomposition de $\vec{b}$ en composantes parallèles et perpendiculaires à $\vec{a}$:

$$\vec{b}_{\parallel} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} \quad \vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel} = \vec{b} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$$



- Rotation d'un vecteur bidimensionnel $\vec{a}$ d'un angle φ :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi) \\ x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

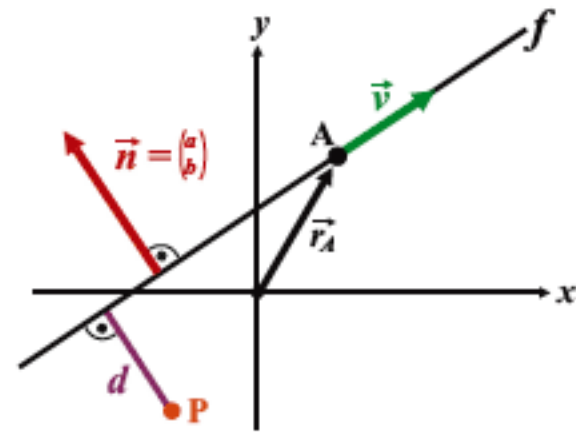


12.1 Droites (voir aussi p. 16)

12.1.1 Dans le plan

► Equation cartésienne: $f: ax + by + c = 0$

- **Vecteur normal:** $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp f$
- **Vecteur directeur:** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \parallel f$



- **Distance** du point $P(x_P; y_P)$ à f : $d(P, f) = \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- **Bissectrices** de deux droites: $\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

	$f_1 \parallel f_2$	$f_1 \perp f_2$	$\varphi = \angle(f_1; f_2)$
$f: y = mx + q$	$m_1 = m_2$	$m_1 = \frac{-1}{m_2}$	$\tan(\varphi) = \left \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right $
$f: \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \vec{v}$	$\vec{v}_1 = k \cdot \vec{v}_2$	$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$	$\cos(\varphi) = \frac{ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 }{\ \vec{v}_1\ \cdot \ \vec{v}_2\ }$
$f: ax + by + c = 0$	$\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$	$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$	$\cos(\varphi) = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{\ \vec{n}_1\ \cdot \ \vec{n}_2\ }$

12.1.2 Dans l'espace

► Equation paramétrique: $f: \lambda \mapsto \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{v}$

- Point „initial”: Point A donné sur f ($\lambda = 0$).
- Vecteur directeur $\vec{v}$: vecteur parallèle à f .
- **Traces** S_x, S_y, S_z : points d'intersection de f avec les plans de coordonnées.

⇒ Equation des plans voir p. 35.

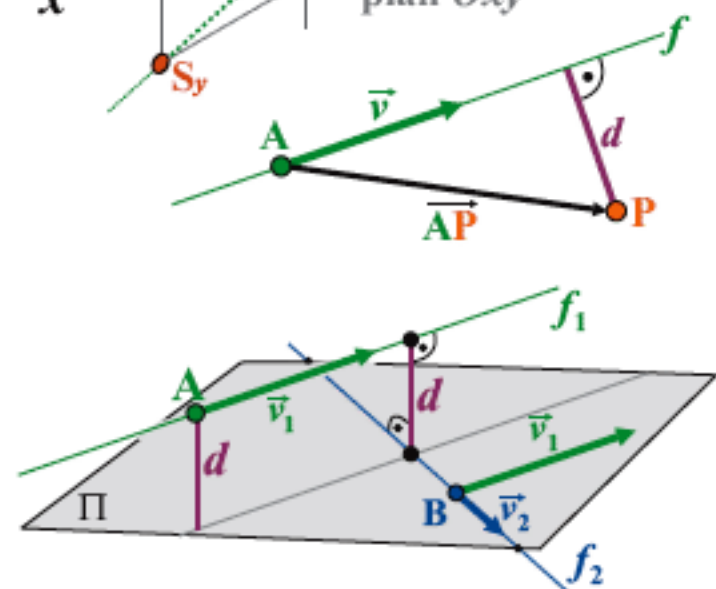
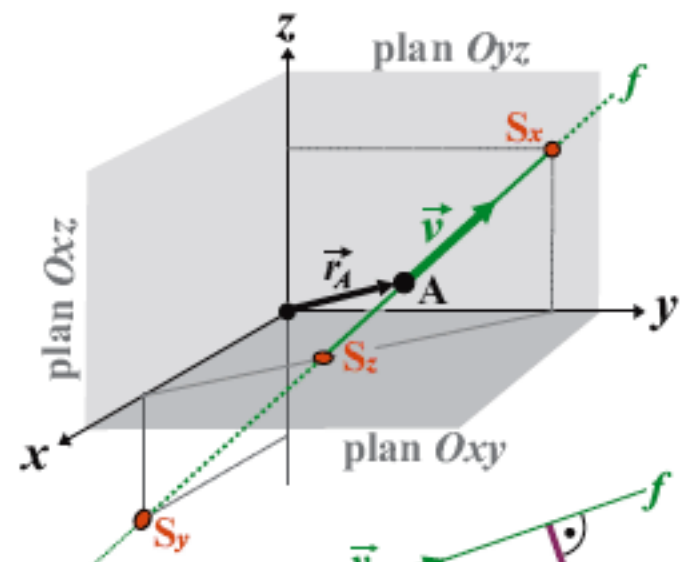
► **Distance** du point P à la droite $f: \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{v}$

dans l'espace: $d(P, f) = \frac{\|\vec{v} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$

► **Distance** entre deux droites

$f_1: \vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \cdot \vec{v}_1$ et $f_2: \vec{r} = \vec{r}_B + \tilde{\lambda} \cdot \vec{v}_2$

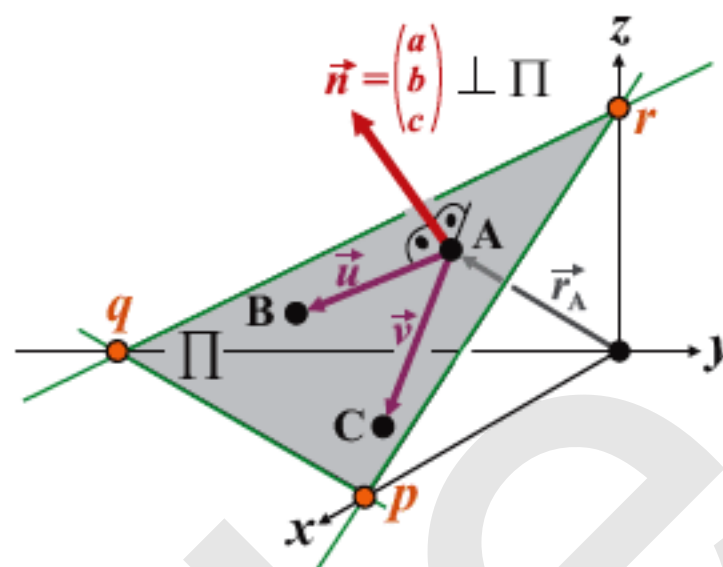
dans l'espace: $d(f_1, f_2) = \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}$



12.2 Plans

► Equation vectorielle: $\Pi : \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

- Si trois points A, B, C ou si un point A et deux **directions différentes** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont connues.
- A toute paire (t, s) correspond exactement un point P (de vecteur position $\vec{r}$) sur Π .



► Equation cartésienne: $\Pi : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0$ resp. $\Pi : ax + by + cz + d = 0$

- vecteur normal:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \Pi$$

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \iff \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$

- $\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

- Angle φ entre $\begin{cases} \text{plan } \Pi_1 \text{ et} \\ \text{plan } \Pi_2 \end{cases}$:

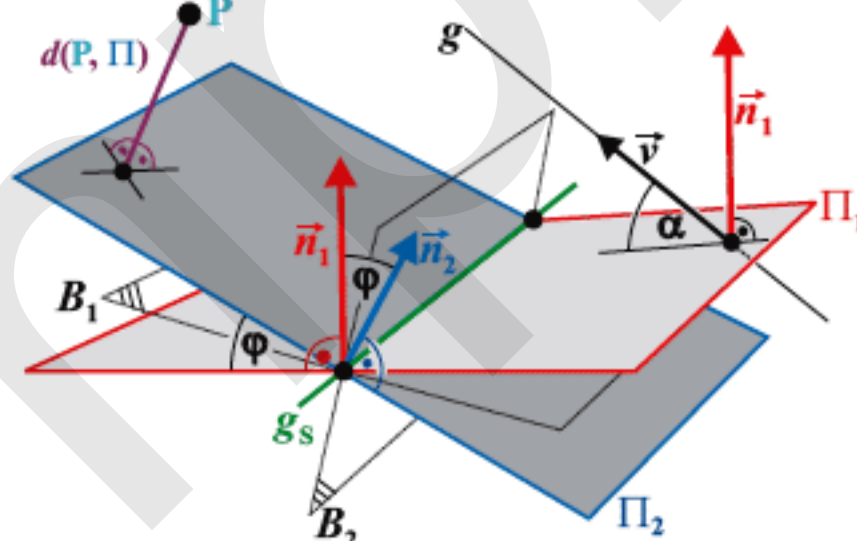
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} \quad 0 \leq \varphi \leq 90^\circ$$

- Angle φ entre $\begin{cases} \text{plan } \Pi \text{ et} \\ \text{droite } g \end{cases}$:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

- Equation normale du plan:

$$H(x, y, z) = \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$



- Distance du $\begin{cases} \text{point } P(u; v; w) \text{ au} \\ \text{plan } \Pi: \end{cases}$

$$d(P, \Pi) = \frac{|au + bv + cw + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Plans bissecteurs:

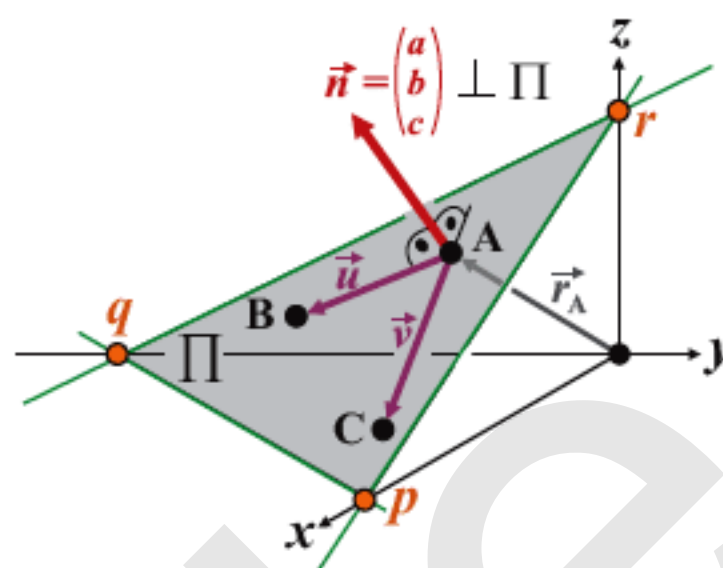
$$B_{1,2} : H_1(x, y, z) = \pm H_2(x, y, z)$$

► Equation utilisant les traces: $\Pi : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ $\begin{cases} p, q, r \neq 0 \\ p, q, r = \infty \text{ sont admis.} \end{cases}$

12.2 Plans

► Equation vectorielle: $\Pi : \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

- Si trois points A, B, C ou si un point A et deux directions différentes $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont connues.
- A toute paire (t, s) correspond exactement un point P (de vecteur position $\vec{r}$) sur Π .



► Equation cartésienne: $\Pi : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0$ resp. $\Pi : ax + by + cz + d = 0$

- vecteur normal:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \Pi$$

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \iff \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$

- $\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

- Angle φ entre $\begin{cases} \text{plan } \Pi_1 \text{ et} \\ \text{plan } \Pi_2: \end{cases}$

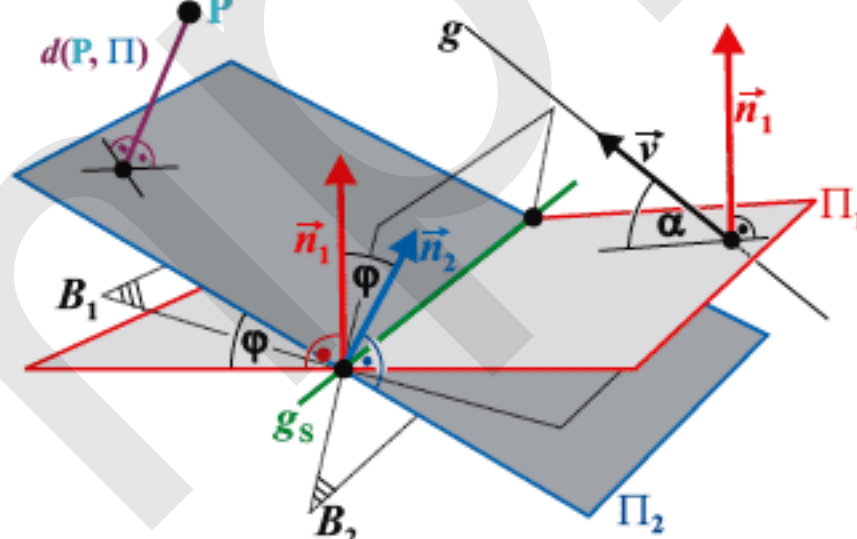
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} \quad 0 \leq \varphi \leq 90^\circ$$

- Angle φ entre $\begin{cases} \text{plan } \Pi \text{ et} \\ \text{droite } g: \end{cases}$

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

- Equation normale du plan:

$$H(x, y, z) = \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$



- Distance du $\begin{cases} \text{point } P(u; v; w) \text{ au} \\ \text{plan } \Pi: \end{cases}$

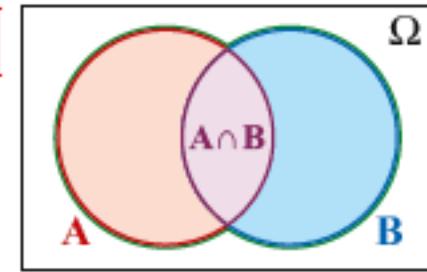
$$d(P, \Pi) = \frac{|au + bv + cw + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Plans bissecteurs:

$$B_{1,2} : H_1(x, y, z) = \pm H_2(x, y, z)$$

► Equation utilisant les traces: $\Pi : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ $\begin{cases} p, q, r \neq 0 \\ p, q, r = \infty \text{ sont admis.} \end{cases}$

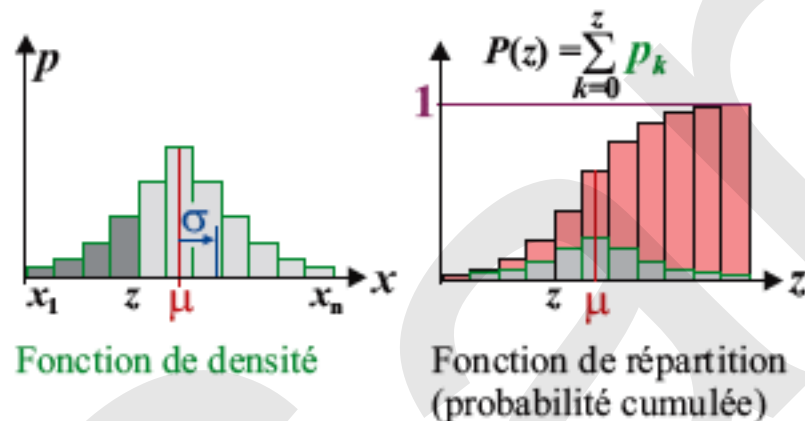
- { Evènement impossible: $P(\emptyset) = 0$
Evènement certain: $P(\Omega) = 1$ } $\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$
- Evènement contraire: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Additivité: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Probabilité conditionnelle: $P(B|A)$ = Probabilité que B se réalise sachant que A est déjà réalisé: Réduction de l'univers Ω à A : $P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- Multiplicativité: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ (Formule des probabilités composées)
- Deux évènements A et B sont appelés indépendants, si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Distribution binomiale (Bernoulli) voir p. 38.



13.3 Distributions des probabilités

Distribution discrète:

La variable aléatoire X prends une des n valeurs $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec les probabilités (facteurs de pondération) $p_1, p_2, \dots, p_n$.



$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{k=1}^n p_k = 1$$

Normalisation

$$E(X) = \mu = \sum_{k=1}^n p_k \cdot x_k$$

Valeur moyenne (espérance)

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{k=1}^n p_k \cdot (x_k - \mu)^2$$

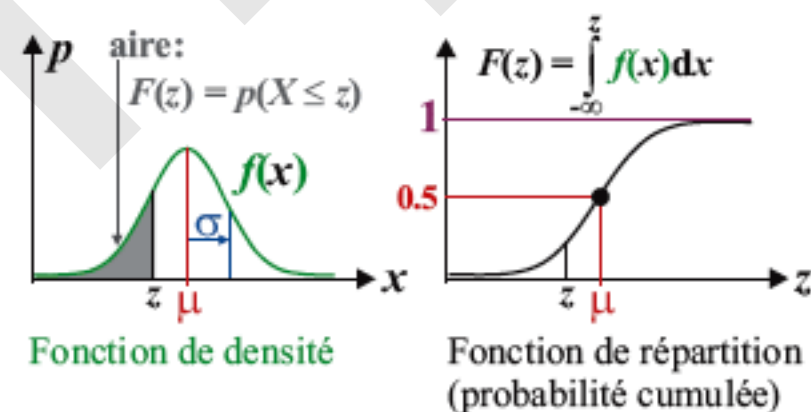
Variance

$$S(X) = \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Ecart-type

Distribution continue:

La variable aléatoire X prends des valeurs $x \in \mathbb{R}$ quelconques. La probabilité d'observer la valeur x est donnée par la fonction de densité $f(x)$.



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx$$

$$V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 dx$$

$$S(X) = \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Soient X, Y deux variables aléatoires et a, b des constantes. On a:

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

$$V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$$

13.4 Distribution binomiale (distribution discrète)

L'univers est constitué de deux événements: $\Omega = \{A, \bar{A}\}$, avec les probabilités constantes $P(A) = p$ et $P(\bar{A}) = 1 - p$. La variable aléatoire X compte le nombre de fois que l'évènement A est observé dans n répétitions de l'expérience. On écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. La probabilité que...

- A soit réalisé au moins une fois: $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$
- A soit réalisé exactement k fois: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ $0 \leq k \leq n$
- A soit réalisé au plus x fois: $P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ $0 \leq x \leq n$
- Espérance: $E(X) = np$ écart-type: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
- Pour $np(1-p) > 9$ la distribution binomiale (loi binomiale) peut être approximée par la distribution normale (loi normale).

13.5 Distribution normale, loi normale (distribution continue)

- Fonction de densité: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribution normale centrée réduite:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

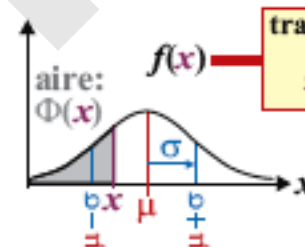
- Fonction de répartition:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Distribution normale centrée réduite:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\Rightarrow \text{Tableau dans la couverture intérieure à la fin})$$

Distribution normale:
 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$



Symétrie:

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

Distribution normale centrée réduite:
 $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$



$$f(-z) = f(+z) \\ F(-z) = 1 - F(+z)$$

- Quelques probabilités fréquentes pour la loi normale:

$\mu \pm 1\sigma$	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm 3\sigma$
$P(X - \mu < 1\sigma) \approx 68.3\%$	$P(X - \mu < 2\sigma) \approx 95.4\%$	$P(X - \mu < 3\sigma) \approx 99.7\%$

13.6 Statistique à une variable

Soi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ l'ensemble des valeurs où $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont les fréquences absolues correspondantes.

Le nombre total d'observations est donné par $n = \sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Les fréquences relatives des x_i sont définies par $p(x_i) = \frac{n_i}{n}$ où $\sum_{i=1}^k p(x_i) = 1$.

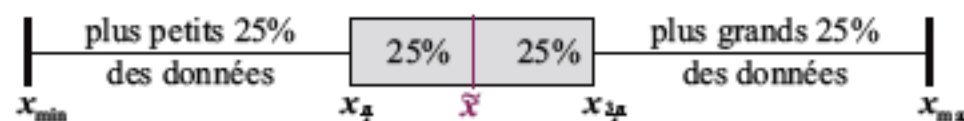
	données individuelles	données groupées (classes)
Données	n observations $x_1, x_2, \dots, x_n$	k observations $x_1, x_2, \dots, x_k$ avec fréquences absolues $n_1, n_2, \dots, n_k$
Moyenne arithmétique	$\bar{x} = E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\bar{x} = E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k p(x_i) x_i$
Médiane	La médiane $\tilde{x}$ des valeurs d'une observation est... - la valeur centrale si n est impaire. - la moyenne des deux valeurs centrales si n est paire.	
Mode, Valeur dominante	Le mode x_M est la valeur la plus fréquente.	
Etendue	$E = x_{\max} - x_{\min}$	
Variance* (échantillon représentant une population)	$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2$ ou $s_x^2 = \sum_{i=1}^k p(x_i) (x_i - \bar{x})^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

[*] Si les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ représentent une population (ou si la variance intérieure d'une expérience est cherchée), il faut remplacer le dénominateur $n - 1$ par n .

Ecart-type: $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Le coefficient de variation $V = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\%$ permet la comparaison d'expériences.

Box plot: Détermine la médiane $\tilde{x}$ ainsi que les quartiles $x_{\frac{3n}{4}}$ et $x_{\frac{n}{4}}$, les valeurs minimale ($x_{\min}$) et maximale ($x_{\max}$) de l'expérience.



Inéquation de Tschebyshev:

Pour un échantillon de moyenne $\bar{x}$ et variance s_x^2 , la probabilité qu'une observation x soit au plus éloignée de λ de la moyenne $\bar{x}$ est donnée par: $P(|x - \bar{x}| < \lambda) \geq 1 - \frac{s_x^2}{\lambda^2}$

13.7 Statistique à deux variables: régression et corrélation

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ n paires de valeurs. La dépendance des variables aléatoires X et Y peut être décrite par une **fonction modèle** $y = f(x)$ qui dépend de paramètres $a, b, \dots$. Il s'agit de trouver les paramètres $a, b, \dots$ tels que la moyenne des carrés des écarts $y_i - f(x_i)$ devienne minimale:

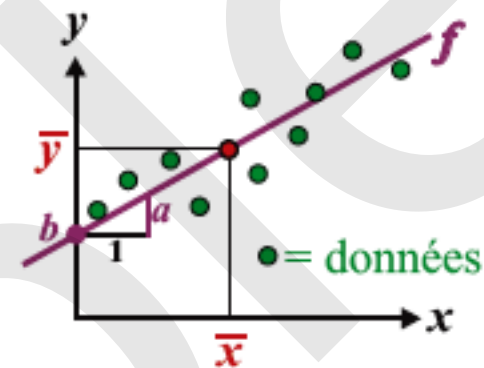
$$F(X) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \text{minimale} \quad (\text{Méthode des moindres carrés})$$

Régression linéaire:

Fonction modèle: $y = f(x) = a \cdot x + b$ avec

- Pente: $a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{c_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$

- Ordonnée à l'origine: $b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$



Coefficient de corrélation:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{c_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Covariance:

$$c_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$c_{xy} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

r_{xy} décrit la mesure de corrélation entre x et y :

Coefficient de corrélation r_{xy}			
maximale	forte	moyenne	faible à aucune
$ r_{xy} = 1$	$1 > r_{xy} \geq 0.7$	$0.7 > r_{xy} \geq 0.3$	$0.3 > r_{xy} \geq 0$

Alternative: Systeme d'équations linéaires pour trouver a et b :

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^n x_i^2) \cdot a + (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

14 Symboles mathématiques

$A \Rightarrow B$	Implication: A implique B („si A alors B ”).
$A \Leftrightarrow B$	Equivalence: A est équivalent à B .
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	Ensembles de nombres (voir p. 2).
$\mathbb{D}, \mathbb{W}$	Domaine de définition / codomaine (voir p. 14).
$f : x \mapsto y = f(x)$	y [var. dépendante] est fonction de x [var. indépendante]
$A = \{a, b, c, \dots\}$	L'ensemble A des éléments a, b, c .
$[a, b]$	L'Intervalle entre (et avec) a et b .
$]a, b[$	L'Intervalle entre (mais sans) a et b . Exemple: $]2, 5] =$ Ensemble de x , tel que $2 < x \leq 5$.
$5 \in \mathbb{N}$	Elément: Le nombre 5 est dans $\mathbb{N}$; (5 est un naturel).
$1.5 \notin \mathbb{N}$	Pas élément: Le nombre 1.5 n'est pas dans $\mathbb{N}$.
$P \in f$	Le point P est situé sur le graphe de la fonction f .
$A \subset B$	Contenu dans...: L'ensemble A est contenu dans B .
$g \subset \Pi$	La droite g (ensemble de points) est située dans le plan Π .
$A \cap B$	A intersection B : Eléments qui font partie de A et de B .
$g \cap \Pi$	Droite g interceptée avec le plan Π .
$A \cup B$	A union B : Eléments qui font partie de A ou de B .
$A \setminus B$	A sans B : Eléments qui font partie de A mais pas de B .
$ $	Condition (si). Exemples: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} =$ Ensemble de tous les x réels inférieurs à 1. $P(B \mid A) =$ probabilité que B se réalise sachant que A est déjà réalisé.
$\forall$	Pour tout: Exemple: $\forall x \in \mathbb{R}$: Pour tout nombre réel x ...
$\exists$	Il existe: $\exists n \in \mathbb{N}$: Il existe (un) nombre naturel n tel que...

Alphabet grec

A α Alpha	H η Eta	N ν Nü	T τ Tau
B β Beta	Θ θ, ϑ Theta	Ξ ξ Xi	Y υ Ypsilon
Γ γ Gamma	I ι Iota	O $\omicron$ Omicron	Φ ϕ, φ Phi
Δ δ Delta	K κ Kappa	Π π Pi	X χ Chi
E ϵ, ε Epsilon	Λ λ Lambda	P ρ Rho	Ψ ψ Psi
Z ζ Zeta	M μ Mü	Σ σ, ς Sigma	Ω ω Omega

Index

Addition, 2–4

aire, 6, 10, 11, 33

aire sous une fonction, 30

Algèbre, 4

algèbre, 3

algorithme du pivot de Gauss, 23

angle (droite, plan), 16, 34, 35

angle au centre, inscrit, 9

angle entre vecteurs, 33

annuité, 27

antidérivée (primitive), 29, 30

arc, 9

argument, angle ($\mathbb{C}$), 2

arrangement, 36

asymptote, 10, 17

Base (logarithmes), 5, 18

binôme de Newton, formules binomiales, 4

binomiale (distribution), 4, 38

bissectrices, 7, 34, 35

box-plot, 39

Cône, 11

calcul des intérêts, 27

calcul différentiel, 28

calcul intégrale, 30

calotte sphérique, 12

capital, 27

cardinalité, 36

carré, 8

Cavalieri, principe de, 11

centre, 9, 10, 12

centre de gravité (triangle), 7, 33

cercle circonscrit / inscrit, 7, 8, 13

cercle trigonométrique, 19

cercle: parties et équation, 9

cerf-volant, 8

chaise, 28, 29

changement de base (log), 5

changement de variable (int), 30

coefficients du binôme, 4, 36

colinéarité, coplanarité (vecteurs), 32

combinaison, 36

combinaison linéaire, 32

combinatoire, 36

complément, 36

compléter les carrés, 9, 10, 12, 16

coniques, 10

conjugué ($\mathbb{C}$), 2

convergence, 25

corde (cercle), 9

corrélation, covariance, 40

cosinus, 6, 19, 29

croissance exponentielle, 18

cube (hexaèdre), 11–13

cylindre, 11

Définition explicite, récursive (suites), 24

demi-vie, 18

dénominateur, 4, 17

dérivées, dérivation, 28, 29

déterminant (matrice), 23

développer, 3, 16

discriminant (équations), 21

distance, 34

distance (droite, plan), 34, 35

distribution binomiale, normale, 38

distributions de probabilité, 37

divergence, 25

division, 2–5

division euclidienne, 17, 21

dodécaèdre, 12, 13

domaine de définition / des valeurs, 14

droites, 16, 34

Ecart-type, 37–39

élasticité, 27

ellipse, 10

ellipsoïde, 13

ensembles, ensemble vide, 36

entiers (nombres), 2

équation cartésienne (droite, plan), 16, 34, 35

équation normale (droite, plan), 16, 35

équation paramétrique (droite, plan), 34, 35

équation vectorielle (droite, plan), 34, 35

équations, 3, 21

espérance, 37, 38

espace fondamental, 36

Euclide, théorème, 6

Euler (nombre d'), 18

Euler, formule ($\mathbb{C}$), 2

Euler, théorème (polyèdres), 12

évènement (contraire), 36, 37

excentricité, 10

explicite (suites), 24

exponentielle (fonction), 18

exposant, 5, 18
extrema, 28, 29

Factorielle, 4, 36
factoriser, 3, 16
fonction, 14
fonction affine, 16
fonction de densité, 37, 38
fonction de probabilité cumulée, 37, 38
fonction de répartition, 37, 38
fonction exponentielle, 18
fonction linéaire, 16
fonction marginale, 27
fonction quadratique, 16
fonctions logarithmes, 18
fonctions polynomiales, 15
fonctions rationnelles, 17
fonctions trigonométriques, 6, 19, 20
formules d'addition (fonc. trig.), 20
fractions, 4
fréquence (absolue, relative), 39

Géométrie vectorielle, 32
géométrie classique dans l'espace 11
géométrie classique plane, 6

Hauteur, 6, 7, 11
hexaèdre (cube), 12, 13
Hôpital, règle de, 25
hyperbole, 10, 17

Icosaèdre, 12, 13
identités remarquables, 4
inéquation, 3
induction mathématique, 26
inflexion, point de, 28, 29
intégrale définie, indéfinie, 30
intégration (règles), 30
intérêt, 27
intercepts, 16, 35
intersection, 7, 16, 36
inverse, 3, 4
irrationnels (nombres), 2

Laplace (probabilité), 36
limites, 25
logarithmes, 5, 18, 29
loi commut. / associat. / distr., 3
loi de similarité, 6
loi des cosinus / sinus, 6
loi normale (distribution), 38
longueur (vecteur), 32

longueur d'une courbe, 31
losange, rhombe, 8

Mathématiques financières, 27
matrices (transp., inv., rang,...), 23
matrices (unité, multiplication), 22
maximum, minimum, 28, 29
médian, 39
médianes, médiatrices, 7
module ($\mathbb{C}$), 2
moyenne, 26, 39
multiplication, 2–5

Naturels (nombres), 2
Newton, binôme de, 4
Newton, méthode numérique, 21
nombre conjugué ($\mathbb{C}$), 2
nombre d'Euler, 2, 18, 29
nombres: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, 2
normal (vecteur), 16, 33–35
normale (distribution), 38
norme (vecteur), 32
numérateur, 4, 17

Octaèdre, 12, 13
ordonnée à l'origine, 16, 35

Parabole, 10, 15, 16
paraboloïde, 13
parallélépipède, 11
parallélogramme, 8, 32, 33
parallèle, 16, 34, 35
parenthèses (règles), 3
parité de fonctions, 15
pente, 16, 40
pente d'une fonction (tangente), 28
périmètre, 9
période, 19
permutation, 36
perpendiculaire, 16, 33–35
pivot, 23
plan de Gauss ($\mathbb{C}$), 2
plan tangent à une sphère, 12
plans bissectrices, 35
platoniques, solides, 12, 13
point d'inflexion, 28, 29
pôles, 17
polyèdres, 12, 13
polynômes de Taylor, 31
pondération, facteur de, 26, 37
primitive (antidérivée), 29, 30

prismes, 11
probabilité (Laplace), 36, 37
probabilité conditionnelle, 37
produit scalaire / vectoriel / mixte, 33
puissance, 2, 3, 5, 17
puissances, séries, 31
pyramide, 11
Pythagore, théorème de, 6

Quadrilatères, 8

Racine, 2, 3, 5, 17, 21, 29
radians, 19
rang d'une matrice, 23
rationnels (nombres), 2
rayon, 9, 10, 12
réciproque, 14
rectangle, 8
récursive, récurrence, 24, 26, 36
réels (nombres), 2
régression linéaire, 40
règle de l'Hôpital, 25
règles d'intégration, 30
règles de dérivation, 28
règles de parenthèse, 3
rente, 27
rhombe / losange, 8
rotation (vecteur), 14, 23

Sécante, 9, 28
secteur, 9, 12
section d'or, 26
segment, 9, 12
séries, 24
séries de puissances, 31
similarité, 6
sinus, 6, 19, 29
solides de révolution, 13, 31
solides platoniques, 12, 13
sommet, 16
sous-ensemble, 36
soustraction, 2-4
sphère: parts et équation, 12
statistique, 39
stochastique, 36
suites, 24
surface, 6, 11
symétrie, 15, 36
système d'équation linéaire, 22

Tangente, 19, 28, 29
tangente (cercle, conique), 9, 10

taux d'intérêt / de croissance, 27
Taylor, polynômes, 31
Thalès, 6, 9
tétraèdre, 12, 13
théorème de l'angle au centre, 9
théorème fondamental de l'algèbre, 21
théorème fondamental de l'analyse, 30
théorie des ensembles, 36
tore, 13
traces (d'une droite), 34
transformations, 3, 4
translation, 14
trapèze, 8
triangle de Pascal, 4
triangle rectangle, 6
triangles, 6
triangles isocèles et équilatéraux, 7
Tronc de cône/pyramide, 11
Tschebyshev, inéquation de, 39

Union, 36
unité imaginaire ($\mathbb{C}$), 2
univers (probabilité), 36

Valeur absolue, 15
valeur actuelle / finale, 27
valeurs moyennes, 26
variable aléatoire, 37
variance, 37, 39
vecteur (unité, addition,...), 32
vecteur / valeur propre (matrice), 23
vecteur directeur (droite, plan), 34, 35
vecteur normal, 16, 33, 35
vecteur position, 32
vecteurs colinéaires, coplanaires, 32
Viète, théorème, 21
volume, 11, 13, 31, 33
volume solide de révolution, 13, 31

Zero, 21, 29
zone sphérique, 12